



## EKSAMEN I SIF5013 MATEMATIKK 4N

Bokmål  
Lørdag 11. mai 2002  
Kl. 9–14

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)

Rottnan: *Matematisk formelsamling*

Vedlegg: Formelark i numerikk

Sensurdato: 4. juni

*Alle svar skal begrunnes, og det skal gå klart fram hvordan svarene er oppnådd.*

### Oppgave 1

- a) La  $a$  være en positiv konstant, og la  $u(t-a)$  være stepfunksjonen (Heavisidefunksjonen) gitt ved  $u(t-a) = 0$  for  $t < a$ ,  $u(t-a) = 1$  for  $t > a$ .

Vis at den Laplacetransformerte av funksjonen  $g_a(t) = u(t-a) \sin t$  er

$$G_a(s) = e^{-as} \frac{\cos a + s \sin a}{s^2 + 1}.$$

Finn invers Laplacetransformert  $h_a(t)$  for funksjonen

$$H_a(s) = \frac{2s + 3a}{s^2 + 2as + a^2 + 1}.$$

- b) Løs, for  $t \geq 0$ , initialverdi problemet

$$y'' + 2y' + 2y = r(t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

når  $r(t)$  er gitt ved  $r(t) = 5 \sin t$  for  $0 \leq t \leq \pi$ ,  $r(t) = 0$  for  $t > \pi$ .

Oppgitt delbrøkoppspalting:

$$\frac{5}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 1)} = \frac{2s + 3}{s^2 + 2s + 2} - \frac{2s - 1}{s^2 + 1}$$

### Oppgave 2

Løs integralligningen

$$y(t) = ke^{-t} + \int_0^t e^{-k(t-\tau)} y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

der  $b$  og  $k$  er konstanter.

### Oppgave 3

- a) Funksjonen  $f(x)$  er gitt for  $0 < x < \pi$  ved

$$f(x) = \frac{x}{2} \cos x, \quad 0 < x < \pi.$$

Finn sinusrekka til  $f(x)$  når det oppgis at for  $n \neq 1$  er  $b_n$  gitt ved

$$b_n = (-1)^n \frac{n}{n^2 - 1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

(Hint for å beregne  $b_1$ :  $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ .)

- b) Gitt den partielle differensialligningen

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{for } 0 < x < \pi, t > 0$$

med randbetingelser

$$(2) \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0 \quad \text{for } t > 0.$$

Vis at metoden med separasjon av variable (produktmetoden) fører til løsninger av formen  $u_n(x, t) = G_n(t) \sin nx$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , der  $G_n(t)$  er løsning av differensialligningen

$$G'' + 2G' + n^2 G = 0.$$

Bestem  $G_n(t)$  for  $n = 1$  og for  $n > 1$ .

- c) Finn en rekkeutvikling for en løsning  $u(x, t)$  av (1) som oppfyller (2) og initialbetingelsene

$$(3) \quad u(x, 0) = \frac{x}{2} \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \text{for } 0 < x < \pi.$$

### Oppgave 4

Finn den Fouriertransformerte  $\hat{f}(w) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx$  for funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bruk invers Fouriertransformasjon til å finne verdien av integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w \cos 2w}{w} dw.$$

**Oppgave 5**

Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende datasett:

|       |   |     |     |   |
|-------|---|-----|-----|---|
| $x_i$ | 1 | 1.5 | 2   | 3 |
| $y_i$ | 2 | 1   | 0.5 | 0 |

**Oppgave 6**

Vi skal løse numerisk

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(x, 0) &= \sin(2\pi x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Med Crank-Nicolson skjema finner vi en tilnærmede  $U_i^{j+1}$  til løsningen  $u$  i punktet  $(x_i, t_{j+1})$  ved å løse

$$(2 + 2r)U_i^{j+1} - r(U_{i+1}^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) = (2 - 2r)U_i^j + r(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j) \quad \text{der } \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, n-1, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \end{matrix}$$

og  $x_i = i \cdot h$ ,  $t_j = j \cdot k$ , der  $h = 1/n$  er romskritt,  $k$  er tidsskritt og  $r = k/h^2$ .

La  $r = 1/2$  og  $n = 4$ . Sett opp et ligningssystem for å finne  $U_i^1$  for  $i = 1, 2, 3$ , med Crank-Nicolsons metode.  $U_i^0$  gis av initialbetingelser. (Ligningssystemet skal ikke løses.)

**Oppgave 7**

Finn en tilnærmede til løsningen av den ikke-lineære ligningen

$$x^2 + e^x - 1 = 0$$

ved å utføre 3 iterasjoner med Newtons metode, startverdi  $x_0 = -1$ . Beregn residualen for  $x_3$ .

**Oppgave 8**

Bruk ett skritt av Heuns metode (forbedret Eulers metode) for å approksimere løsningen til

$$\begin{aligned} y' &= y^2 + t \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

ved tiden  $t = 0.1$ .