Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Yura Lyubarskii (735 935 26)
Andreas Asheim (735 91 007)

EKSAMEN I TMA4123 MATEMATIKK 4M

Lørdag 2. juni 2007
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C):
Enkel kalkulator(HP-30S)
Rottmann: Matematisk formelsamling

Seunsurdato: 23. juni 2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen

Oppgave 1

a) La f være en 2π-periodisk funksjon slik at $f(x) = e^{-2x}$ for $-\pi < x < \pi$. Finn den komplekse Fourier-rekken til f.

b) La g være en 2π periodisk funksjon slik at $g(x) = e^{x}$ for $-\pi < x < \pi$. Funksjonens komplekse Fourier-rekke har formen

$$g(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}.$$

Finn summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

Oppgave 2 Gitt den følgende partielle differensialligningen

$$(*) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = 0, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

a) Finn alle løsningene av (*) på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$(1) \qquad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

b) Finn løsningene av (*) som tilfredsstiller randkravene (1) og også initialbetingelsen

$$(2) \qquad u(x,0) = \sin^2 x + 2\cos x.$$

Oppgave 3 Funksjonen

$$\frac{1}{a^2+t^2}$$

har for enhver $a > 0$ Fourier-transform lik

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ e^{-a|x|}.$$

Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \cos 3xt \ dx.$$

Oppgave 4 Systemet av ikke-lineære ligninger

$$\begin{aligned} \ln(x) + xy &= 0 \\ \frac{1}{2}y^2 + x^2y - \frac{1}{2} &= 0 \end{aligned}$$

har en løsning nær $x = 1,\ y = 1$. Bruk Newtons metode for system for å finne en bedre approksimasjon til denne løsningen(dvs. ett skritt).

Oppgave 5 Gitt varmeledningsproblemet

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} & & t \geq 0,\ -1 \leq x \leq 1 \\ u(-1,t) &= 0 & & t \geq 0 \\ u(1,t) &= 1 & & t \geq 0 \end{aligned}$$

med initialbetingelse

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Bruk gitteret (x_i, t_j) med $i = 0, \ldots, n$ hvor $x_i = -1 + ih,\ h = 2/n$, og $t_j = jk$. Sett opp Eulers eksplisitte metode for å finne en numerisk approksimasjon u_i^{j+1} til løsningen u i punktet (x_i, t_{j+1}). Bruk da

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &\approx (u(x,t+k) - u(x,t))/k \\ u_{xx}(x,t) &\approx (u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t))/h^2 \end{aligned}$$

b) Sett $n = 5$ og $k = 0.01$ og beregn $[u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_4^1]$ fra de kjente verdiene $[u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0, u_5^0]$

Oppgave 6 Gitt datasettet

x_i	0.0	0.2	1.0
y_i	0.1	1.0	0.5

a) Finn et polynom $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer datasettet, velg metode selv. Beregn $p(0.5)$.
Hint: Det anbefales at du leser gjennom deloppgave b) før du gjør denne oppgaven.

b) Den følgende matlabkoden skulle vi kunne bruke til å løse problemet i deloppgave a), men dessverre har det sneket seg inn en feil:

```
1  - function p=newtoninterpol(x,y,xx)
2  - % Beregner p, verdien av det polynomet som interpolerer
3  - % datasettet (x,y) i punktet xx vha. Newtons dividerte
4  - % differanser
5  -
6  - n = length(x);
7  - diff = zeros(n,n);
8  - diff(:,1) = y;
9  - for j=1:n
10 -   for i=1:n-j+1
11 -     diff(i,j) = (diff(i+1,j-1)-diff(i,j-1))/(x(j+i-1)-x(i));
12 -   end
13 - end
14 -
15 - p = y(1);
16 - for k=2:n
17 -   pol = xx-x(1);
18 -   for i=2:k-1
19 -     pol = pol*(xx-x(i));
20 -   end
21 -   p = p + pol*diff(1,k);
22 - end
```

Vi kjører programmet med kommandoen `newtoninterpol([0 0.2 1],[0.1 1 0.5],0.5)` og får da feilmeldingen

```
??? Attempted to access diff(2,0); index must be a positive integer or logical.
Error in ==> newtoninterpol at 11
    diff(i,j) = (diff(i+1,j-1)-diff(i,j-1))/(x(j+i-1)-x(i));
```

Hvis vi skriver `diff` på linje 14 vil variabelen *diff* skrives ut på skjermen når vi kjører programmet. En korrekt kode skulle da ha gitt

```
diff =

    0.1000    4.5000   -5.1250
    1.0000   -0.6250         0
    0.5000         0         0
```

Hva er det meningen at *diff* skal inneholde? Det finnes nøyaktig en feil i koden, finn denne og foreslå hva som må forandres for at koden skal regne riktig.
NB: Det er ikke nødvendig hverken å skrive kode eller gjøre strukturelle forandringer i den gitte koden for å løse denne oppgaven.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}
\end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
\text{Jacobi :} \qquad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\
\text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= h\,\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\
\mathbf{K}_2 &= h\,\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)
\end{aligned}$$

a. Let $f(x)$ be a 2π-periodic function such that $f(x) = e^{-2x}$ for $-\pi < x < \pi$. Find the Fourier series of f in the complex form.

b. Let $g(x)$ be a 2π-periodic function such that $g(x) = e^{x}$ for $-\pi < x < \pi$. The Fourier series of g has the form

$$g(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-in} e^{inx}$$

Find the sum of the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

---

a. $$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

In our case

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x(-2-in)} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{-1}{2+in} \left[e^{-\pi(2+in)} - e^{\pi(2+in)} \right] =$$

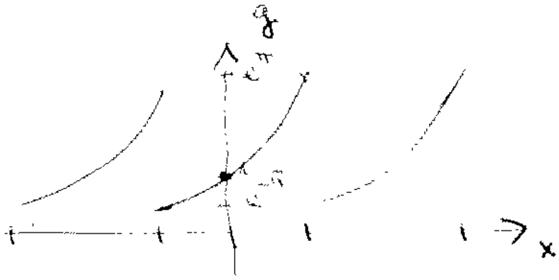
$$= \frac{(-1)^n}{2+in} \frac{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}{2\pi} = \frac{(-1)^n}{2+in} \frac{\sinh 2\pi}{\pi}$$

$$e^{-2x} \sim \frac{\sinh 2\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+in} e^{inx} .$$

6.

$$\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{1+n^2} \implies$$

$$g(x) \sim \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx}$$



$$1 = g(0) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} = \frac{\sinh \pi}{\pi} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sinh \pi \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2} \implies$$

$$\implies \frac{\pi}{2 \sinh \pi} - \frac{1}{2} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1+n^2}$$

$$\frac{1}{2}\left(g(\pi+0)+g(\pi-0)\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi}+e^{-\pi}\right) = \cosh \pi =$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1+in}{1+n^2} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} =$$

$$= \frac{\sinh \pi}{\pi} + 2\,\frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}\,\frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - \frac{1}{2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

Problem 2

Given a partial differential equation

$$(*) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

a. Find all solutions of the form $u(x,t) = X(x)T(t)$ which satisfy the boundary conditions

$$(1) \quad u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(\pi,t) = 0, \qquad t > 0$$

b. Find solution of $(*)$ which meets the boundary conditions (1) and also the initial conditions

$$(2) \qquad u(x,0) = \sin^2 x + 2\cos x \qquad 0 < x < \pi.$$

(a) $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow \dfrac{X''}{X} = \dfrac{\dot{T}}{T} + 2 = p$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} X'' - pX = 0, \quad 0 < x < \pi \\ X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p = -k^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ X_0(x) = C \\ X_k(x) = \cos kx, \quad k = 1, 2, \ldots \end{array}$$

$$\frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = -k^2 - 2 \Rightarrow T_k(t) = e^{-(2+k^2)t}$$

General solution: $u_0(x,t) = Ce^{-2t}$,

$$u_k(x,t) = C_k \cos kx \cdot e^{-(2+k^2)t}, \qquad k > 0.$$

(b) $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$(2) \Longrightarrow \quad u(x,0) = \frac{1}{2} + 2\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\Longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-2t} + 2\cos x \; e^{-3t} - \frac{1}{2}\cos 2x \; e^{-6t}$$

Problem 3

Fourier Transform of $\frac{1}{a^2+t^2}$ is $\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-a|x|}$. Find $\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \cos 3xt \, dx$

—

We have

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{ixt} \, dx = \frac{1}{a^2+t^2}$$

Taking the real part:

$$\frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} \cos xt \, dx = \frac{1}{a^2+t^2}$$

$$\|$$

$$\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|} \cos xt \, dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{0} e^{ax} \cos xt \, dx$$

Let $a = 2$ and replace t by $3t$.

We obtain

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x} \cos 3tx \, dx = \frac{2}{4+9t^2}$$

Oppgave 4

Vi er gitt $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$ og skal finne $\mathbf{x}_1$ med Newtons metode. Først setter vi opp Jacobimatrisen til problemet:

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} 1/x + y & x \\ 2xy & y + x^2 \end{pmatrix}.$$

Videre trenger vi $\mathbf{J}^{(0)}$ og $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$:

$$\mathbf{J}^{(0)} = \mathbf{J}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} \ln(1) + 1 \\ 1/2 + 1 - 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Systemet vi må løse for å finne korreksjonen $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$ blir da(som oppgitt på formelarket):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Løsningen på denne blir

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste approksimasjon til løsningen av det ikkelineære systemet blir da:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 - 1/2 \\ 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

PS: den eksakte løsningen til problemet er $x = 0.649866\ldots$, $y = 0.663196\ldots$.

Oppgave 5

a) Vi setter inn approksimasjonene til løsningen inn i de oppgitte approksimasjonene til de deriverte, og setter så lik. Resultatet blir

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

Om vi omrokkerer litt får vi følgende skjema

$$u_i^{j+1} = u_i^j + r(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \quad \text{hvor} \quad r = \frac{k}{h^2}.$$

Dette er Eulers eksplisitte metode for varmeledningsligningen.

b) Med $n = 5$ og $k = 0.01$ blir $h = 2/5$ og $r = 0.0625$. De kjente verdiene ved $t = 0$ er

$$[u_0^0, u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0, u_5^0] = [0, 0, 0, 1, 1, 1].$$

gitt ved initialbetingelse og randverdier. Vi legger merke til at $u_1^1 = u_1^0$ og $u_4^1 = u_4^0$ på grunn av at den andrederiverte er lik null i u_1^0 og u_4^0. Videre regner vi ut

$$u_2^1 = u_2^0 + r(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0) = 0 + 0.0625(1 - 0 + 0) = 0.0625$$

Tilsvarende utregning, evt. ved symmetribetraktninger får vi at $u_4^1 = 1 - 0.0625 = 0.9375$. Tilsammen gir dette oss

$$[u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_4^1] = [0,\ 0.0625,\ 0.9375,\ 1].$$

Oppgave 6

a) Sett opp Newtons skjema for dividerte differanser:

$$\begin{array}{c|cccc}
0.0 & 0.1 & & \\
 & & 4.500 & \\
0.2 & 1.0 & & -5.125 \\
 & & -0.625 & \\
1.0 & 0.5 & &
\end{array}$$

Da blir

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0.1 + 4.500 \cdot (x - 0.0) - 5.125 \cdot (x - 0.0) \cdot (x - 0.2) \\
&= 0.1 + 4.500 \cdot x - 5.125 \cdot x \cdot (x - 0.2)
\end{aligned}$$

og videre

$$p(0.5) = 0.1 + 4.500 \cdot 0.5 - 5.125 \cdot 0.5 \cdot (0.5 - 0.2) = 1.58125$$

Oppgaven kan også løses med Lagrangeinterpolasjon. Det er mer jobb, spesielt siden en kan få gode hint om Newtoninterpolasjonen i oppgaveteksten til b). Vi må da sette opp og evaluere de tre kardinalpolynomene:

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x - 0.2)(x - 1.0)}{(-0.2)(-1.0)} \\
l_1(x) &= \frac{(x - 0.0)(x - 1.0)}{(0.2)(0.2 - 1.0)} \\
l_2(x) &= \frac{(x - 0.0)(x - 0.2)}{(1.0)(1.0 - 0.2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_0(0.5) &= \frac{(0.5 - 0.2)(0.5 - 1.0)}{(-0.2)(-1.0)} = -0.75 \\
l_1(0.5) &= \frac{(0.5 - 0.0)(0.5 - 1.0)}{(0.2)(0.2 - 1.0)} = 1.5625 \\
l_2(0.5) &= \frac{(0.5 - 0.0)(0.5 - 0.2)}{(1.0)(1.0 - 0.2)} = 0.1875
\end{aligned}$$

Det interpolerende polynomet blir

$$p(x) = 0.1 \cdot l_0(x) + 1.0 \cdot l_1(x) + 0.5 \cdot l_2(x),$$

og verdien som etterspørres er

$$\begin{aligned} p(0.5) &= 0.1 \cdot l_0(0.5) + 1.0 \cdot l_1(0.5) + 0.5 \cdot l_2(0.5) \\ &= 0.1 \cdot (-0.75) + 1.0 \cdot 1.5625 + 0.5 \cdot 0.1875 = 1.58125 \end{aligned}$$

b) Første kolonne av *diff* inneholder vektoren y. Resten er de dividerte differansene utledet av denne og x-verdiene. Feilmeldingen kommer av at vi prøver å kalle `diff(i,j-1)` med `j`, som holder styr på kolonnenummeret for verdiene 1 til n. Denne skal telle fra 2 til n, kolonne 1 er allerede satt til å være vektoren y.