Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN TMA4130 MATEMATIKK 4N, AUG. 2004

Oppgave 1

a) Bestem

$$\mathcal{L}(t\sin t), \qquad \mathcal{L}(t\cos t) \qquad \text{og} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(1+s^2)^2}\right).$$

b) Finn ved hjelp av Laplacetransformasjonen de løsninger av differensialligningen

$$tx'' - 2x' + tx = 0$$

som tilfredstiller $x(0) = 0$.

Oppgave 2

Fouriertransformen av funksjonen $f(x) = \mathrm{e}^{-2|x|}$ defineres som vanlig:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2|x|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Beregn $\hat{f}(0)$ og $\hat{f}(1)$.

Oppgave 3

Temperaturen $u = u(x,t)$ i en *totalt* isolert tråd tilfredsstiller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (0 < x < \pi,\ t > 0) \\ u_x(0,t) = 0 = u_x(\pi,t) & (t > 0) \end{cases}.$$

Finn først alle løsninger av formen $u(x,t) = X(x)T(t)$. Bestem løsningen som har initialtemperaturen

$$u(x,0) = 2 + \cos(x) + 7\cos(5x).$$

(Benytt superposisjonsprinsippet!)

Oppgave 4

a) Sett opp dividerte differansetabeller for datasettene:

i)

k	0	1	2	3
x_k	0	1	4	6
$f(x_k)$	1	−1	1	−1

ii)

k	0	1	2	3
x_k	4	1	6	0
$f(x_k)$	1	−1	−1	1

b) Bruk resultatene fra **a)** til å lage to interpolasjonspolynom $p_1(x)$ og $p_2(x)$, og vis at polynomene er identiske.

Oppgave 5

Vi skal løse diffusjonsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

for $0 \le x \le 1$ og $t \ge 0$. Randbetingelsene er

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$

og startverdi

$$u(x,0) = \cos(\pi(x - \tfrac{1}{2})), \quad 0 \le x \le 1.$$

a) La $h = 0.1$ og $k = 0.04$. Formuler forlengs Euler for dette problemet.

b) Ved å bruke algoritmen i **a)** fikk vi denne tabellen:

t	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
k	0.9133	0.9603	x	0.8981	0.7769
$2k$	0.8771	y	0.8771	0.7769	0.5645
$3k$	0.8423	z	0.8423	0.7165	0.5206

Finn x, y og z.

Oppgave 6

La $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 1$ og $z_0 = \frac{3}{4}$, og gjør én iterasjon med Gauss–Seidel på ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x & - & y & & & = & 2 \\ -x & + & 4y & - & z & = & 3\,. \\ & - & y & + & 4z & = & 2 \end{array}$$