Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Anne Kværnø tlf. 73 59 35 42
Sigmund Selberg tlf. 73 55 02 84

EKSAMEN I TMA4130 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Onsdag 30. november 2005
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 22.12.2005

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Bruk Laplacetransformasjonen til å løse initialverdiproblemet

$$y' + y + \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,d\tau = u(t-1) \quad \text{for } t > 0, \qquad y(0) = 1,$$

der u er trinnfunksjonen (step function).

Oppgave 2 La f være den 2π-periodiske funksjonen gitt ved $f(x) = x^4$ for $-\pi < x \le \pi$. Det oppgis at f har Fourierrekke

$$\frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2n^2-6)}{n^4}\cos nx$$

Bruk dette til å finne summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^2n^2-6}{n^4} \qquad \text{og} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^4n^4-12\pi^2n^2+36}{n^8}$$

Oppgave 3

a) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ av differensialligningen

(1) $$u_{tt} + u_t = u_{xx} \quad \text{for} \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0,$$

med randbetingelser

(2) $$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t \ge 0.$$

b) Finn $u(x,t)$ som oppfyller (1) og (2) samt initialbetingelsene

$$u(x,0) = 0 \quad \text{og} \quad u_t(x,0) = \sin 4x.$$

Oppgave 4 Finn den Fouriertransformerte $\hat{f}(w)$ av funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty.$$

Bruk resultatet til å vise at

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos w}{1+w^2}\,dw = \frac{\pi}{2e}.$$

Oppgave 5

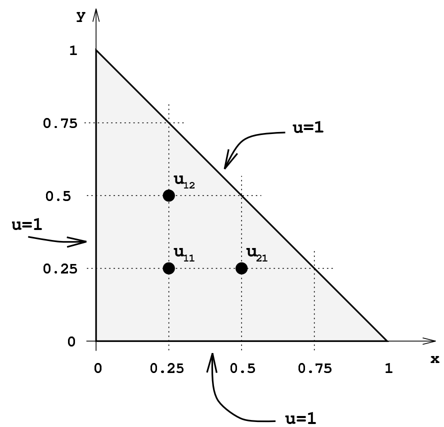
Gitt Poisson-ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = -1$$

i et område R, gitt ved

$R = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\}$,

og med $u(x,y) = 1$ på randen av R, se figuren til høyre.



La $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, med $x_i = ih$ og $y_j = jh$.
Bruk skrittlengde $h = 0.25$ i både x- og y-retning og sett opp differanseligningene for u_{ij} i hvert av de indre punktene.

Finn u_{11}, u_{12} og u_{21}.

Oppgave 6 Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & 16x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & - & x_2 & & & = & 2. \end{array}$$

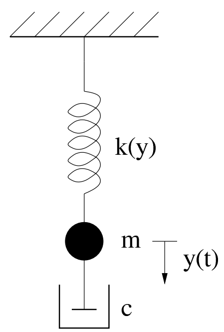
Kan dette systemet løses ved bruk av Jacobi-iterasjoner? Begrunn svaret.

Hvis ja: Utfør én Jacobi-iterasjon, med startverdiene $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$.

Hvis nei: Skriv om systemet slik at du er sikker på at Jacobi-iterasjonene konvergerer. Utfør deretter én iterasjon, med startverdiene $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 1$.

Oppgave 7
Denne oppgaven tar for seg en mekanisk svingekrets, der fjær-koeffisienten k avhenger av hvor mye fjæren strekkes eller klemmes sammen.
Med $m = 1$, $c = 0.5$ og $k(y) = 2 + y^2$ vil bevegelsen av kula i svingekretsen til høyre beskrives av ligningen

$$y'' + 0.5y' + 2y + y^3 = 0.$$



Skriv ligningen om til et system av første ordens ordinære differensialligninger.

La $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ og bruk Heuns metode med skrittlengde $h = 0.1$ til å finne tilnærmelser til $y(0.1)$ og $y(0.2)$.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

  Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$f'(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - \frac{1}{2}hf''(\xi)$$
$$f'(x) = \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) + \frac{1}{2}hf''(\xi)$$
$$f''(x) = \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$
$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$
$$\text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\mathbf{K}_1 = h\,\mathbf{f}(x_n,\, \mathbf{y}_n)$$
$$\mathbf{K}_2 = h\,\mathbf{f}(x_n + h,\, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1)$$
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$$

Se også formlene i Rottmann.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$