Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen tlf. 73 59 35 23

EKSAMEN I TMA4125/30 MATEMATIKK 4N

Bokmål
Onsdag 9. august 2006
kl. 15–19

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 30. august 2006.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 La $y(t)$ være løsningen av initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} &y'' + 4y' + 4y = f(t) \quad \text{for } t > 0 \\ &y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0 \end{aligned}$$

der

$$f(t) = \begin{cases} 5\sin t & \text{for } 0 < t < 2\pi, \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

Vis at da er Laplacetransformasjonen til y er

$$Y(s) = G(s)(1 - e^{-2\pi s}) \quad \text{der} \quad G(s) = \frac{3-4s}{5(s^2+1)} + \frac{4}{5(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Finn $y(2\pi)$.

Oppgave 2

a) Finn alle funksjoner $u(x,t) = F(x)G(t)$ slik at

(1) $$t^3\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{for} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

og

(2) $$u(0,t) = 0 = u(\pi,t) \quad \text{for} \quad t > 0.$$

b) Finn en funksjon $u(x,t)$ som tilfredstiller (1), (2) og

$$u(x,1) = 4\sin x + \sin 4x.$$

Oppgave 3

a) Finn den Fouriertransformerte $\hat{u}(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ixw}dx$ til den generelle løsningen $u(x,t)$ av den partielle differensialligningen

(3) $$u_t = u_{xx} - u,$$

som tilfredsstiller randbetingelsene

(4) $$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_{xx}(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_t(x,t) = 0 \quad \text{for alle } t \geq 0.$$

b) Bestem tilslutt den løsningen $u(x,t)$ av ligning (3) som tilfredsstiller (4), og initialbetingelsen

$$u(x,0) = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Oppgave 4 Konsentrasjonen av oppløst oksygen i vann er et viktig element i analyse av vannkvalitet. Metningsverdiene er en funksjon av temperaturen. Tabellen gir metningsverdier (D) for noen temperaturer (T).

T (°C)	5	10	15	20
D (mg/l)	12.80	11.33	10.15	9.17

Bruk polynominterpolasjon (bruk alle verdiene) til å finne en tilnærmelse til metningsverdien D ved 13 °C.

Oppgave 5 Gitt integralet

$$I = \int_1^2 e^{2x}dx$$

Finn en tilnærmelse S til integralet I ved bruk av Simpsons metode, med skrittlengde $h = 0.25$.

Finn en øvre grense for feilen $|I - S|$.

Simpsons metode med skrittlengde $h = 0.5$ vil gi tilnærmelsen 23.721559. Bruk dette til å finne en tilnærmelse til feilen $I - S$.

Oppgave 6 Vi skal løse diffusjonsligningen med et kildeledd, gitt ved

$$u_t = u_{xx} + x, \qquad 0 \le x \le 1, \qquad t \ge 0,$$

med randbetingelsene

$$u(0,t) = 1, \qquad u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0$$

og startbetingelsen

$$u(x,0) = 1 - x, \qquad 0 \le x \le 1.$$

La h være skrittlengden i x-retningen og k i t-retningen, og formuler en eksplisitt metode som gir tilnærmelse til løsningen $u(x,t)$ i punktene (x_i, t_j) der $x_i = ih$ og $t_j = jk$.

La $h = 0.25$, $k = 0.01$, og bruk metoden til å finne tilnærmelser til $u(0.25, 0.01)$, $u(0.5, 0.01)$ og $u(0.75, 0.01)$.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}
\end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
\text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\
\text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\
\mathbf{K}_2 &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)
\end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$