Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Kontakt under eksamen:
Yura Lyubarskii (735 935 26)

EKSAMEN I TMA4125 MATEMATIKK 4N

Lørdag 10. juni 2006
Tid: 09:00 –13:00
Hjelpemidler: Enkel kalkulator(HP 30S), Rottmann: matematisk formelsamling
Vedlagt: Formler i numerikk og Tabell over Laplaceformerte
Bokmål
Sensur: 1. juli 2006

Oppgave 1

a) Finn de inverse laplacetransformerte av funksjonene

$$X(s) = \frac{s}{(s-1)^2+1}, \quad Y(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2+1}.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t) + y(t) \\ y'(t) = & -x(t) + y(t) \end{cases}, \; t > 0, \quad x(0) = y(0) = 1.$$

Oppgave 2

a) Gitt en funksjon på $(0, \pi)$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi/2 \\ 1, & \pi/2 < x < 1 \end{cases}$$

Skisser funksjonens jevne 2π-periodiske utvidelse og finn dens fourierrekke.

b) Finn alle funksjoner på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$ som tilfredsstiller ligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - u, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

og

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0.$$

c) Finn funksjonen $u(x,t)$ som tilfredsstiller betingelsene ovenfor og i tillegg

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Finn også en funksjon u som tilfredsstiller betingelsene i **b)** og

$$u(x,0) = \cos x\ \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi.$$

Oppgave 3

Finn en funksjon $f(t)$, $t > 0$ slik at

$$\int_0^t f(t-\tau)e^{3\tau}d\tau = \sin t, \quad t > 0.$$

Oppgave 4

La $u(t)$ være heavisidefunksjonen:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Regn ut verdien av konvolusjonen

$$(u(t+1) - u(t-1)) * e^{-|t|}$$

og finn konvolusjonens fouriertransformerte.

Oppgave 5

a) Finn polynomet $p(t)$ av lavest mulig grad som løser interpolasjonsproblemet

t_n	-2	-1	0	1	2
$p(t_n)$	3	1	1	3	7

b) Bruk Simpsons regel til å beregne

$$\int_{-2}^{2} p(t)dt$$

med noder i punktene $-2, -1, 0, 1, 2$ og sammenlign svaret med den nøyaktige verdien av dette integralet.

Oppgave 6

Bruk Gauss-Seidel-iterasjon (2 steg) på systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 - x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ved å begynne i punktet $(0,0,0)^{\mathsf{T}}$.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)} \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= h \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{K}_2 &= h \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2) \end{aligned}$$

Se også formlene i Rottmann.

Tabell over Laplacetransformerte

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$