Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
—- (99 99 99 99)

EKSAMEN I MATEMATIKK 4N (TMA4130)

Bokmål
???dag 0. august 2007
09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator(HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: ??.??.2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) La $y(t)$ være løsningen av initialverdiproblemet

$$y'' - y' - 6y = 100\Big(\sin t + u(t - \pi/2)\cos t\Big), \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

der $u(t)$ er Heavisidefunksjonen (enhets-trappefunksjonen, the unit step function). Vis at den Laplacetransformerte av $y(t)$ er gitt ved

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+2} + \frac{2s-14}{s^2+1}\right)\left(1 + s\,e^{-s\pi/2}\right).$$

b) Finn løsningen $y(t)$ av initialverdiproblemet i a).

Oppgave 2

a) Finn Fourier-sinusrekken og finn Fourier-cosinusrekken til funksjonen

$$f(x) = \sin \pi x \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1.$$

b) Finn alle løsninger på formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ av randverdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y) = 0 \quad \text{for } 0 < y < 1.$$

c) Finn den løsningen av randverdiproblemet i b) som også tilfredsstiller randkravene

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u(x, 1) = 0 \quad \text{for } 0 < x < 1.$$

Oppgave 3 La $f(x)$ være en periodisk funksjon med periode 2π, gitt ved

$$f(x) = (x^2 + \pi^2)^2, \qquad -\pi < x < \pi$$

Det er gitt at Fourierrekken til $f(x) er$

$$\frac{28\pi^4}{15} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n n^2 \pi^2 - 3}{n^4} \cos n\pi.$$

a) Bruk fourierrekken over til å finne verdien av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 - 3}{n^4}.$$

Finn også summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\pi^4 - 6n^2\pi^2 + 9}{n^8}.$$

Oppgave 4

a) Finn en nedre triangulær matrise L med bare 1'ere på diagonalen og en øvre triangulær matrise U slik at $LU = A$ er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Den ikke-homogene biharmoniske likningen

$$\nabla^4 u = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = f(x, y)$$

er gitt på området bestemt av $0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1$. Vi har i tillegg gitt randverdiene $u = 0$ og $\nabla^2 u = 0$ på alle ytre render.

Vis at dette problemet er ekvivalent med å løse de to elliptiske problemene:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = f(x, y), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ v(x, y) = 0 & \text{på randen} \end{cases}$$
$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = v(x, y), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ u(x, y) = 0 & \text{på randen} \end{cases} \tag{1}$$

c) Bruk endelege differanser med skrittlengde $h = 1/3$ i hver retning til å finne et lineært likningsystem som størrelsene $u_{ij} \approx u(ih, jh)$ må oppfylle når funksjonen $f(x, y) = -1$ for alle x, y i området $0 \le x \le 1$ og $0 \le y \le 1$.

Oppgave 5 Vi ser på initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} y' &= xy \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

a) Finn den eksakte løsningen til (2). Regn ut et steg ved hjelp av Eulers metode med steglengde $h = 0.1$.

b) En 3. ordens Runge-Kutta metode er gitt ved

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \frac{1}{3}h, y_n + \frac{1}{3}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}k_2) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_3. \end{aligned}$$

Regn ut et steg med denne metoden for initialverdiproblemet (2) med $h = 0.1$. Sammelign resultatet med det du fikk i punkt a).