Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I MATEMATIKK 4N/D (TMA4125 TMA4130 TMA4135)

13. August 2007

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Løsning: fouriersinusrekken til $f(x)$: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, der $b_1 = 1$ og $b_i = 0$ for $i \geq 2$. Ingen regning er nødvendig.

Finn fourier cosinus rekken til $f(x) = \sin \pi x \; 0 < x < 1$. Løsning:

$$a_0 = \int_0^1 \sin \pi x \, dx = \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi x \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi} \cos \pi + \frac{1}{\pi} \cos 0 = \frac{2}{\pi} \tag{1}$$

$$a_1 = 2 \int_0^1 \sin \pi x \cos \pi x \, dx = \int_0^1 \sin 2\pi x \, dx = 0 \tag{2}$$

Det siste integralet er lik null siden $\sin 2\pi x$ integreres over en hel periode. Vi finner a_n for $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n = 2 \int_0^1 \sin \pi x \cos n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 \tfrac{1}{2}(\sin(1-n)\pi x + \sin(1+n)\pi x) \, dx = \\ \left[-\frac{1}{(1-n)\pi} \cos(1-n)\pi x - \frac{1}{(1+n)\pi} \cos(1+n)\pi x \right]_0^1 = \\ -\frac{1}{(1-n)\pi}(-1)^{1-n} - \frac{1}{(1+n)\pi}(-1)^{1+n} + \frac{1}{(1-n)\pi} + \frac{1}{(1+n)\pi} = \\ 2\frac{1+(-1)^n}{(1-n^2)\pi} \end{aligned} \tag{3}$$

Dvs fouriercosinusrekken er

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi}\cos 2\pi x - \frac{4}{15\pi}\cos 4\pi x - \frac{4}{63\pi}\cos 6\pi x + \cdots$$

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4}{(4j^2-1)\pi}\cos 2j\pi x$$

b) Vi skulle finne alle løsninger til randverdiproblemet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u \tag{4}$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y) = 0 \tag{5}$$

på formen $u(x,y) = X(x)Y(y)$:

Randbetingelsene gir $X'(0)Y(y) = X'(1)Y(y) = 0$ for alle y. Dvs $X'(0) = X'(1) = 0$ eller $Y(y) = 0$. Vi har for det siste tilfellet $u(x,y) = X(x)Y(y) = 0$. Hvilket er den trivielle løsningen. Vi vil søke andre løsninger i teksten under. Dvs at vi vil anta at $Y(y) \neq 0$.

Partsiellderiverer vi $u(x,y) = X(x)Y(y)$ to ganger med hensyn på x og y så får vi $u_{xx}(x,y) = X''(x)Y(y)$ og $u_{yy}(x,y) = X(x)Y''(y)$.

Setter vi dette inn i den opprinnelige likningen får vi:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = X(x)Y(y). \tag{6}$$

Vi omformer denne likningen og får:[1]

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + 1 = k. \tag{7}$$

Vi vil løse

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k. \tag{8}$$

Vi løser for $k = \lambda^2 > 0$. Da er $X(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}$, og $X'(x) = A\lambda e^{\lambda x} - \lambda B e^{-\lambda x}$. Randbetingelsene gir $0 = X'(0) = A\lambda - \lambda B$. Dvs $A = B$ og $0 = X'(1) = A\lambda e^{\lambda} - A\lambda e^{-\lambda}$. Dvs $A = 0$. Og derfor $F(x) = 0$. Vi har antatt at $u(x,y) \neq 0$, så vi ser bort ifra denne.

Vi løser for $k = 0$. Da er $X(x) = Ax + B$, og $X'(x) = A$. Randbetingelsene gir $0 = X'(0) = X'(1) = A$. Dvs $A = 0$. Løsning er $X_0(x) = B$. Legg merke til at vi ikke ser bort ifra konstant løsning.

[1] Vi har antatt at $u(x,y) \neq 0$. Derfor kan vi dele med $u(x,y)$ på begge sider av likningen.

Vi løser for $k = -\lambda^2 < 0$. Da er $X(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$ og $X'(x) = B\lambda\cos(\lambda x) - A\lambda\sin(\lambda x)$. Første randbetingelse gir $0 = X'(0) = B\lambda\cos(0) - A\lambda\sin(0) = B\lambda$. Dvs $B = 0$. Andre randbetingelse gir $0 = X'(1) = -A\lambda\sin(\lambda)$. Dvs $\lambda = n\pi$ der $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dvs $X_n(x) = A_n\cos(n\pi x)$.

Vi vil nå løse

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = 1 + n^2\pi^2. \tag{9}$$

Den har løsning

$$Y_n(y) = A_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} + B_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}y}.$$

c) Fra randkravet $X(x)Y(1) = u(x,0) = 0$ har vi $Y(1) = 0$. Vi får derfor

$$0 = A_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}} + B_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}}.$$

Dvs: $B_n = -A_n e^{2\sqrt{1+n^2\pi^2}}$.

Løsningene er på formen $u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$

Fra superposisjonsprinsippet får vi at en generell løsning for randverdi problemet

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) \\ &= A_0 e^{y} + B_0 e^{-y} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi x)(A_n e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} + B_n e^{-\sqrt{1+n^2\pi^2}y}) \end{aligned} \tag{10}$$

Randbetingelsen $u(x,0) = \sin\pi x$ gir

$$\sin\pi x = A_0 + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi x)(A_n + B_n) \tag{11}$$

Cosinusrekkeutviklingen til $\sin\pi x$ funnet i punkt a) gir

$$\begin{aligned} A_0 + B_0 &= \frac{2}{\pi} \\ A_n + B_n &= 0, \qquad \text{For } n > 0 \text{ odde} \\ A_n + B_n &= \frac{4}{\pi(1-n^2)}, \qquad \text{For } n > 0 \text{ jevn} \end{aligned} \tag{12}$$

Bruker så $B_n = -A_n e^{2\sqrt{1+n^2\pi^2}}$:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{2}{(1-e^2)\pi} \\
B_0 &= -\frac{2e^2}{(1-e^2)\pi} \\
A_n = B_n &= 0, \qquad \text{For } n > 0 \text{ odde} \\
A_n &= \frac{4}{\pi(1-n^2)(1-e^{2\sqrt{1+n^2\pi^2}})}, \qquad \text{For } n > 0 \text{ jevn} \\
B_n &= -\frac{4e^{2\sqrt{1+n^2\pi^2}}}{\pi(1-n^2)(1-e^{2\sqrt{1+n^2\pi^2}})}, \qquad \text{For } n > 0 \text{ jevn} \qquad (13)
\end{aligned}$$

Løsningen blir

$$u(x,y) = 2\frac{e^y - e^{2-y}}{(1-e^2)\pi} + \sum_{n=1,\,2|n}^{\infty} \cos(n\pi x)\frac{4e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}y} - 4e^{\sqrt{1+n^2\pi^2}(2-y)}}{\pi(1-n^2)(1-e^{2\sqrt{1+n^2\pi^2}})} \qquad (14)$$

Oppgave 2

Funksjonen $f(x)$ er kontinuerlig i $x = \pi$. Vi har at $f(\pi) = 4\pi^4$ og at $f(\pi)$ er lik fourierrekken til $f(x)$ innsatt $x = \pi$.

Det er gitt at Fourierrekken til $f(x) er$

$$4\pi^4 = f(\pi) = \frac{28\pi^4}{15} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^n(n^2\pi^2 - 3)}{n^4} \cos n\pi =$$

$$= \frac{28\pi^4}{15} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 - 3}{n^4} =$$

Dvs at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2 - 3}{n^4} = \frac{2\pi^4}{15}$$

Andre del av oppgaven: Finn også summen til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\pi^4 - 6n^2\pi^2 + 9}{n^8}.$$

Vi bruker Parsevals identitet:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = 2\pi\cdot\left(\frac{28\pi^4}{15}\right)^2 + \pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{16(-1)^n(n^2\pi^2-3)}{n^4}\right)^2 \tag{15}$$

Det er oppgitt at integralet er $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{2656}{315}\pi^9$ Utrykket (15) og vedien av integralet gir

$$\frac{2656}{315}\pi^9 = \frac{1568}{225}\pi^9 + 256\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\pi^2 - 6n^4\pi^2 + 9}{n^8} \tag{16}$$

Løser vi for summen får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\pi^2 - 6n^4\pi^2 + 9}{n^8} = \frac{1}{256}\left(\frac{2656}{315} - \frac{1568}{225}\right)\pi^8 = \frac{\pi^8}{175} \tag{17}$$

Godkjent er også $(0.005714\ldots)\cdot\pi^8$ og $54.220177\ldots$.

Oppgave 3

a) Vi begynner med høyresiden: $\mathcal{L}\{100\,(\sin t + u(t-\pi/2)\cos t)\} = \mathcal{L}\{100\,(\sin t - u(t-\pi/2)\sin(t-\pi/$
Vi bruker 2. forskyvningsteorem og får at den laplacetranformerte av høyresiden er $100(1-e^{-s\pi/2})\frac{1}{s^2+1}$. Den laplacetransformerte av løsningen tilfredstiller den laplacetransformerte av likningen:

$$s^2Y - sy(0) - s'(y) - sY - y(0) - 6Y = 100(1-e^{-s\pi/2})\frac{1}{s^2+1} \tag{18}$$

Setter inn verdiene til $y'(0)$ og $y(0)$.

$$s^2Y - sY - 6Y = 100(1-e^{-s\pi/2})\frac{1}{s^2+1} \tag{19}$$

Vi har $s^2 - s - 6 = (s+2)(s-3)$

$$Y = 100(1-e^{-s\pi/2})\frac{1}{(s^2+1)(s-3)(s+2)} \tag{20}$$

Regner vi ut første parantes til høyresiden i utrykket i oppgaven får vi

$$\frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+2} + \frac{2s-14}{s^2+1} = \frac{1}{(s^2+1)(s-3)(s+2)}. \tag{21}$$

Vi kunne også brukt delbrøksoppspalting.

b) Den inverse trasformerte av $Y(s)$ er lik løsningen av oppgaven Transformerer først første parantes:

$$F(s) = \frac{2}{s-3} - \frac{4}{s+2} + \frac{2s-14}{s^2+1} \tag{22}$$

Den invers transformerte av $F(s)$ er

$$f(t) = 2e^{3t} - 4e^{-2t} + 2\cos t - 14\sin t \tag{23}$$

Løsningen blir

$$y(t) = f(t) - u(t-\pi/2)f(t-\pi/2) \tag{24}$$

Setter inn for $f(t)$ og får

$$\begin{aligned} y(t) = 2e^{3t} - 4e^{-2t} + 2\cos t - 14\sin t \\ - u(t-\pi/2)(2e^{3t-3\pi/2} - 4e^{-2t+\pi} + 2\sin t + 14\cos t) \end{aligned} \tag{25}$$

Oppgave 4

a) Vi kan integrere

$$\frac{y'}{y} = x$$

og får

$$\ln|y| = \tfrac{1}{2}x^2 + C'$$

der C' er en vilkårlig konstant. Derfor, ved å anvende exponentiel funksjon,

$$y = Ce^{x^2/2}.$$

den initielle betingelsen, $y(0) = 1$, gir $C = 1$ og

$$y(x) = e^{x^2/2}.$$

Eulers metoden er gitt ved

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

der $f(x,y) = xy$. Vi får

$$y_1 = y_0 + hx_0y_0 = y_0 = 1$$

siden $x_0 = 0$.

b) Vi bruker nå den 3. ordens Runge-Kutta metoden som er gitt. Vi får

$$k_1 = hx_0y_0 = 0$$

og

$$k_2 = h(x_0 + \frac{1}{3}h)(y_0 + \frac{1}{3}k_1) = \frac{h^2}{3}$$

og

$$k_3 = h(x_0 + \frac{2}{3}h)(y_0 + \frac{2}{3}\frac{h^2}{3}) = \frac{2}{3}h^2(1 + \frac{2h^2}{9}).$$

Derfor,

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}h^2(1 + \frac{2h^2}{9}) \approx 1.00501.$$

Den eksakte verdien er

$$y(x_1) = y(h) \approx 1.00501$$

og den 3. ordens Runge-Kutta metoden gir altså en bedre resultat enn Eulers metode.

Oppgave 5

a) Vi har at $f(x,y) = v_{xx} + v_{yy} = (u_{xx} + u_{yy})_{xx} + (u_{xx} + u_{yy})_{yy} = u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy}$. Videre er $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = v(x,y)$, så $v(x,y) = 0$ på randen er ekivalent med at $\nabla^2 u = 0$ på randen.

b) Vi har tilnærmelsen

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\big(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\big)$$

Vi har da at $v_{ij} = v(ih, jh)$ må tilfredstille

$\frac{1}{1/9}\big(v_{01} + v_{21} + v_{10} + v_{12} - 4v_{11}\big) = -1$

$\frac{1}{1/9}\big(v_{11} + v_{31} + v_{20} + v_{22} - 4v_{21}\big) = -1$

$\frac{1}{1/9}\big(v_{02} + v_{22} + v_{11} + v_{13} - 4v_{12}\big) = -1$

$\frac{1}{1/9}\big(v_{12} + v_{32} + v_{21} + v_{23} - 4v_{22}\big) = -1$

Innsetter randverdier $v_{21} + v_{12} - 4v_{11} = -\frac{1}{9}$, $v_{11} + v_{22} - 4v_{21} = -\frac{1}{9}$, $v_{22} + v_{11} - 4v_{12} = -\frac{1}{9}$ og $v_{12} + v_{21} - 4v_{22} = -\frac{1}{9}$. Vi har alså $A\mathbf{v} = -\frac{1}{9}(1,1,1,1)$, der $\mathbf{v} = (v_{11}, v_{12}, v_{21}, v_{22})$.

Videre får vi tilsvarende at

$\frac{1}{1/9}\big(u_{01} + u_{21} + u_{10} + u_{12} - 4u_{11}\big) = v_{11}$

$\frac{1}{1/9}\big(u_{11} + u_{31} + u_{20} + u_{22} - 4u_{21}\big) = v_{21}$

$\frac{1}{1/9}\big(u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} - 4u_{12}\big) = v_{12}$

$\frac{1}{1/9}\big(u_{12} + u_{32} + u_{21} + u_{23} - 4u_{22}\big) = v_{22}$

Dvs at $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$, der $\mathbf{u} = (u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$. Dvs at $A^2\mathbf{u} = -\frac{1}{9}(1, 1, 1, 1)$.