SIF5013/16 Matematikk 4N og SIF5017 Matematikk 4D 2. august 2001

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1abc, 2ab, 3, 4, 5ab, 6ab, som teller likt ved bedømmelsen.

$\boxed{1}$ **a)** Vi regner ut $F(s)$ og $g(t)$ ved å bruke tabell og reglene for Laplacetransformasjonen.

$$F(s) = \mathcal{L}(\sin t + t\cos t) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1-s^2}{(s^2+1)^2} = \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}$$

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}e^{-2\pi s}\right) = \cos t - \cos(t-2\pi)u(t-2\pi) \\ &= [1-u(t-2\pi)]\cos t = \begin{cases} \cos t & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{for } t > 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Vi setter $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen ved bl.a. å bruke skiftteorem 2 siden $r(t) = 2\cos t\,[1-u(t-2\pi)] = 2\cos t - 2\cos(t-2\pi)\,u(t-2\pi)$. (Eller ved å bruke resultatet fra **a)** siden $r(t) = 2g(t)$.)

$$sY + \frac{1}{s}Y = \frac{2s}{s^2+1}\left(1-e^{-2\pi s}\right) \;\Rightarrow\; Y = \frac{2s^2}{(s^2+1)^2}\left(1-e^{-2\pi s}\right) = F(s)\left(1-e^{-2\pi s}\right)$$

Ved inverstransformeringen bruker vi skiftteorem 2 og $\mathcal{L}^{-1}(F) = f(t)$ fra **a)**.

$$\begin{aligned} y &= (\sin t + t\cos t) - [\sin(t-2\pi) + (t-2\pi)\cos(t-2\pi)]\,u(t-2\pi) \\ &= (\sin t + t\cos t) - [\sin t + (t-2\pi)\cos t]\,u(t-2\pi) = \begin{cases} \sin t + t\cos t & (0 < t < 2\pi) \\ 2\pi\cos t & (t > 2\pi) \end{cases} \end{aligned}$$

c) Vi setter igjen $Y(s) = \mathcal{L}(y)$ og Laplacetransformerer ligningen.

$$s^2Y - s + 4(sY-1) + 8Y = 2e^{-2\pi s} \;\Rightarrow\; Y = \frac{s+4}{s^2+4s+8} + \frac{2}{s^2+4s+8}e^{-2\pi s}$$

Vi omformer Y og inverstransformerer ved hjelp av begge skiftteoremene.

$$\begin{aligned} Y &= \frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+2^2} + \frac{2}{(s+2)^2+2^2}e^{-2\pi s} \\ y &= e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t) + e^{-2(t-2\pi)}\sin 2(t-2\pi)u(t-2\pi) \\ &= e^{-2t}\left[\cos 2t + \sin 2t + e^{4\pi}\sin 2t\, u(t-2\pi)\right] \end{aligned}$$

Svaret er altså

$$y = \begin{cases} e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t) & \text{for } 0 < t < 2\pi \\ e^{-2t}\left(\cos 2t + (1+e^{4\pi})\sin 2t\right) & \text{for } t > 2\pi. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ **a)** Funksjonene $u(x,y) = y$ og $u(x,y) = \cos nx \sinh ny$ oppfyller (i), (ii) og (iii). De to andre funksjonene oppfyller (i) og (ii), men ikke (iii).

For å finne en løsning som også oppfyller (iv), betrakter vi summen

$$u(x,y) = C_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \sinh ny$$

og bestemmer konstantene C_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at $u(x,\pi) = 1 - \cos 2x$.

$$1 - \cos 2x \overset{\text{(iv)}}{=} u(x,\pi) = C_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos nx \sinh n\pi \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1/\pi \\ C_2 = -1/\sinh 2\pi \\ C_n = 0 \text{ for } n \neq 0, 2 \end{cases}$$

En funksjon som er løsning av (i) og oppfyller randbetingelsene (ii), (iii) og (iv) er dermed

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi} - \frac{\cos 2x \sinh 2y}{\sinh 2\pi}.$$

b) Vi setter inn $u(x,y) = F(x)G(y)$ i (i) og bruker randbetingelsene (ii) og (v).

$$F''G' + FG'' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \quad \text{(konstant)}$$

$$\text{(I)}\quad F'' - kF = 0, \quad F(0) \overset{\text{(v)}}{=} 0,\; F'(\pi) \overset{\text{(v)}}{=} 0, \qquad \text{(II)}\quad G'' + kG = 0, \quad G(0) \overset{\text{(ii)}}{=} 0$$

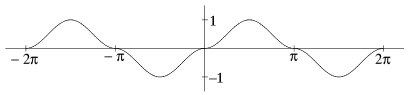
Bestemmer først $F(x)$ og deretter $G(y)$.

$$\begin{aligned} &\text{(I)}\quad F'' - kF = 0,\; F(0) = 0,\; F'(\pi) = 0 \\ &k > 0,\; k = \mu^2: \quad F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x},\; F'(x) = \mu Ae^{\mu x} - \mu Be^{-\mu x} \\ &\qquad\qquad\qquad\quad F(0) = F'(\pi) = 0 \Rightarrow A = B = 0,\; F(x) = 0 \\ &k = 0: \qquad\qquad\;\; F(x) = A + Bx,\; F'(x) = B \\ &\qquad\qquad\qquad\quad F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0 \Rightarrow B = 0,\; F(x) = 0 \\ &k < 0,\; k = -p^2: \; F(x) = A\cos px + B\sin px,\; F'(x) = -pA\sin px + pB\cos px \\ &\qquad\qquad\qquad\quad F(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \quad F'(\pi) = 0,\; A = 0,\; B \neq 0 \;\Rightarrow \cos p\pi = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad p = (2m+1)/2, \quad F(x) = \sin[(2m+1)x/2] \quad (B = 1) \\ &\text{(II)}\quad G'' + kG = 0, \quad k = -[(2m+1)/2]^2, \quad G(0) = 0 \\ &G'' - \left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 G = 0 \;\Rightarrow\; G(y) = Ae^{(2m+1)y/2} + Be^{-(2m+1)y/2} \\ &G(0) = 0 \Rightarrow B = -A,\; G(y) = A\left(e^{(2m+1)y/2} - e^{-(2m+1)y/2}\right) = C\sinh[(2m+1)y/2] \end{aligned}$$

Løsningene av (i) på formen $u(x,y) = F(x)G(y)$ som oppfyller (ii) og (v):

$$u(x,y) = C\sin\frac{(2m+1)x}{2}\sinh\frac{(2m+1)y}{2}, \quad C \text{ vilkårlig konstant, } m = 0,\,1,\,2\ldots$$

$\boxed{3}$ Summen av Fouriersinusrekka er den odde 2π-periodiske utvidelsen av $f(x)$.



For $x = \pi/2$ er $f(x) = 1$ og $\sin(2m+1)x = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Ergo er

$$1 = -\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)}$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} = \frac{\pi}{8}.$$

$\boxed{4}$ Ligningen kan skrives $f(x) = e^{-|x|} - 4f(x) * e^{-|x|}$. Vi setter $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ og Fouriertransformerer ligningen ved å bruke konvolusjonsregelen og den oppgitte Fouriertransformerte.

$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2} - 4\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$
$$\left(1 + \frac{8}{1+w^2}\right)\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$$
$$\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{9+w^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{3}{3^2+w^2} \quad\Longrightarrow\quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{f}(w)\} = \frac{1}{3}e^{-3|x|}$$

der vi inverstransformerte ved hjelp av den oppgitte Fouriertransformerte med $a = 3$.

$\boxed{5}$ **a)** Eulers metode er

$$x_{n+1} = x_n + h\cdot f(x_n, t_n).$$

Vi har $x_0 = 1$, $t_0 = 0$. To skritt med $h = 0.1$ gir

$$x_1 = x_0 + h\cdot f(x_0, t_0) = 1 + 0.1\cdot[-2\cdot 0.1 + 0 + 4] = 2$$
$$x_2 = x_1 + h\cdot f(x_1, t_1) = 1.44$$

b) Heuns metode er

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{2}h\,[K_1 + K_2]$$

hvor

$$K_1 = f(x_n, t_n)$$
$$K_2 = f(x_n + h\cdot f(x_n, t_n), t_{n+1}).$$

Ett skritt med $h = 0.1$ gir

$$K_1 = f(x_0, t_0) = 2$$
$$K_2 = f(x_0 + hf(x_0, t_0), t_1) = f(1.2, 0.1) = 2.4$$
$$x_1 = x_0 + \tfrac{1}{2}h\,[K_1 + K_2] = 1.22.$$

Eksakt løsning er $x(0.1) = 1.2187$.

Feil for Eulers metode er

$$e_1 = |1.2 - 1.2187| = 0.0187.$$

Feil for Heuns metode er

$$e_1 = 0.0013.$$

Vi ser at Heuns metode gir bedre tilnærmelse fordi den er av høyere orden enn Eulers metode.

$\boxed{6}$ **a)** Formelen ser vi ved å flette annenhvert ledd for T_n og U_n.

b) Vi beregner først $T_1 = \frac{h}{2}(f(0) + f(1)) = 0$. Deretter

$$\begin{array}{l|l} T_2 = \frac{T_1+U_1}{2} = 0.353553 & T_{16} = \frac{T_8+U_8}{2} = 0.502804 \\ T_4 = \frac{T_2+U_2}{2} = 0.470745 & T_{32} = \frac{T_{16}+U_{16}}{2} = 0.5043429384 \\ T_8 = \frac{T_4+U_4}{2} = 0.496588 & T_{64} = \frac{T_{32}+U_{32}}{2} = 0.504726 \end{array}$$

Vi finner

$$T_{64} + \frac{T_{64} - T_{32}}{3} = 0.504854$$

så alle 6 siffer er korrekte. Dette skyldes at man generelt har formelen

$$S_{2n} = T_{2n} + \frac{T_{2n} - T_n}{3}$$

dvs Simpsons formel med $2n$ punkter. Dette er en 4. ordens metode, mens trapesmetoden kun er 2. ordens.