SIF5013/16 Matematikk 4N og SIF5017 Matematikk 4D

Løsningsforslag
eksamen 03.08.02

Oppgavesettet har 11 punkter, 1abc, 2, 3ab, 4, 5ab, 6ab som teller likt ved bedømmelsen.

1 **a)** Av $\mathcal{L}\{u(t-b)\} = (1/s)e^{-bs}$ følger ved skiftteorem 1 at

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{at}u(t-b)\} = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}.$$

Vi kan også omforme $f(t)$ og bruke linearitet og skiftteorem 2 for å finne $\mathcal{L}(f)$. Siden $e^{at} = e^{a(t-b+b)} = e^{ab}e^{a(t-b)}$ og $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$ får vi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{ab}\mathcal{L}\{e^{a(t-b)}u(t-b)\} = e^{ab}\cdot e^{-bs}\frac{1}{s-a} = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}.$$

En tredje måte å finne $\mathcal{L}(f)$ på, er å regne ut integralet $\int_b^\infty e^{at}e^{-st}\,dt$.

b) Vi Laplacetransformerer initialverdiproblemet (ved å bruke resultatet i (a) med $a = b = 1$) og løser den transformerte ligningen mhp. $Y = \mathcal{L}(y)$:

$$(s^2Y - s) - 2(sY-1) + Y = \frac{e^{-(s-1)}}{s-1}, \qquad (s-1)^2Y = s-2+\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{s-2}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3} \\ &= \frac{(s-1)-1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{e^{-(s-1)}}{(s-1)^3}. \end{aligned}$$

Vi har $\mathcal{L}^{-1}(1/s^{n+1}) = t^n/n!$ og $\mathcal{L}^{-1}(e^{-s}/s^2) = \frac{1}{2}(t-1)^2u(t-1)$. Dermed får vi av skiftteorem 1 at

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^t[\,1 - t + \tfrac{1}{2}(t-1)^2u(t-1)\,] = e^t - te^t + \tfrac{1}{2}(t-1)^2e^tu(t-1).$$

c) Fra a) har vi $\mathcal{L}(f) = e^{-b(s-a)}/(s-a)$. Av konvolusjonsteoremet følger

$$\mathcal{L}(f*f) = \frac{e^{-b(s-a)}}{s-a}\cdot\frac{e^{-b(s-a)}}{s-a} = \frac{e^{-2b(s-a)}}{(s-a)^2} = e^{2ba}\cdot e^{-2bs}\frac{1}{(s-a)^2}.$$

Siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^2\} = te^{at}$, følger av skiftteorem 1 at

$$(f*f)(t) = e^{2ba}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2bs}}{(s-a)^2}\right\} = e^{2ba}(t-2b)e^{a(t-2b)}u(t-2b) = (t-2b)e^{at}u(t-2b).$$

2 Vi bruker delvis integrasjon for å beregne b_1:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\right]_0^\pi + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^\pi \cos 2x\,dx}_{0} = -\frac{\pi}{2\pi} = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

For $n \geq 2$ er $b_n = (-1)^n 2n/(n^2-1)$. Funksjonen $f(x)$ er en odde funksjon, da er Fourier-rekken til $f(x)$ en sinusrekke:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{2n \sin nx}{n^2-1}, \qquad x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots .$$

Vi setter $x = 1$ i Fourierrekken til $f(x)$. Siden $f(1) = \cos 1$ får vi

$$\cos 1 = -\frac{1}{2}\sin 1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{2n\sin n}{n^2-1}, \quad \text{det gir} \quad \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin n}{n^2-1} = \frac{1}{2}\Big[\cos 1 + \frac{1}{2}\sin 1\Big].$$

3 **a)** Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i den gitte ligningen og separerer variable:

$$F''G = FG'' - FG\,, \qquad \frac{F''}{F} = \frac{G''}{G} - 1 = k \text{ (konstant)}, \qquad \begin{array}{l} F'' - kF = 0 \\ G'' - (k+1)G = 0. \end{array}$$

Randbetingelsene medfører $F'(0) = F'(1) = 0$, og vi må ha $k \leq 0$ for å få løsninger $F(x) \not\equiv 0$. For $k = 0$ får vi $F_0(x) = 1$, og for $k < 0$, $k = -p^2$, får vi $p = n\pi$ og $F_n(x) = \cos n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$.

Ligningen for $G(t)$ blir $G'' - G = 0$ når $k = 0$ og $G'' + (n^2\pi^2 - 1)G = 0$ når $k = -n^2\pi^2$. Det gir

$$\begin{aligned} G_0(t) &= A_0 e^t + B_0 e^{-t} \\ G_n(t) &= A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. (Løsningen for $G_0(t)$ kan også skrives $G_0(t) = A_1^* \cosh t + B_1^* \sinh t$.) For $u(x,t) = F(x)G(t)$ blir svaret

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= F_0(x)G_0(t) = A_0 e^t + B_0 e^{-t} \\ u_n(x,t) &= F_n(x)G_n(t) = \big(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\big)\cos n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

b) Siden den gitte ligningen er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene. Vi setter følgelig

$$u(x,t) = (A_0 e^t + B_0 e^{-t}) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\big)\cos n\pi x$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at initialbetingelsene blir oppfylt. Leddvis derivasjon mhp. t gir

$$u_t(x,t) = (A_0 e^t - B_0 e^{-t}) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(-\omega_n A_n \sin\omega_n t + \omega_n B_n \cos\omega_n t\big)\cos n\pi x.$$

Til bestemmelse av A_n og B_n får vi dermed

(i) $$1 + \cos\pi x = u(x,0) = (A_0 + B_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi x$$

(ii) $$0 = u_t(x,0) = (A_0 - B_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n B_n \cos n\pi x.$$

Av (i) får vi $A_0 + B_0 = 1$, $A_1 = 1$ og $A_n = 0$ for $n \geq 2$. Av (ii) får vi $A_0 - B_0 = 0$ og $B_n = 0$ for $n \geq 1$. Det gir $A_0 = B_0 = 1/2$ og, siden $\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t$,

$$u(x,t) = \cosh t + \cos\omega_1 t \cos\pi x = \cosh t + \cos\big(\sqrt{\pi^2-1}\,t\big)\cos\pi x.$$

4 For $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$ får vi

$$\begin{aligned}\widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-iwx}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^2 2e^{-iwx}\,dx = \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}}\Big[\Big[e^{-iwx}\Big]_0^1 + 2\Big[e^{-iwx}\Big]_1^2\Big] \\ &= \frac{-1}{iw\sqrt{2\pi}}\Big[\big(e^{-iw}-1\big) + 2\big(e^{-2iw}-e^{-iw}\big)\Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,iw}\Big[1 + e^{-iw} - 2e^{-2iw}\Big].\end{aligned}$$

Vi bruker formelen for invers Fouriertransformasjon:

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+e^{-iw}-2e^{-2iw}}{\sqrt{2\pi}\,iw}e^{iwx}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixw}+e^{iw(x-1)}-2e^{iw(x-2)}}{w}\,dw.$$

Siden $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,) = \frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big]$ og $f(x)$ er kontinuerlig i det åpne intervallet $(1,2)$, får vi $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}\,) = f(x) = 2$ for $1 < x < 2$, og følgelig er

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ixw}+e^{iw(x-1)}-2e^{iw(x-2)}}{w}\,dw = 2\pi i\cdot 2 = 4\pi i \quad \text{for } 1 < x < 2.$$

Vi setter inn $x = 3/2$ og bruker Eulers formel ($e^{\pm it} = \cos t \pm i\sin t$):

$$\begin{aligned}4\pi i &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3iw/2}+e^{iw/2}-2e^{-iw/2}}{w}\,dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\cos\frac{3}{2}w + i\sin\frac{3}{2}w) + (\cos\frac{1}{2}w + i\sin\frac{1}{2}w) - 2(\cos\frac{1}{2}w - i\sin\frac{1}{2}w)}{w}\,dw.\end{aligned}$$

Ved å ta imaginærdelen på begge sider av likhetstegnet ser vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{3}{2}w + 3\sin\frac{1}{2}w}{w}\,dw = 4\pi.$$

5 **a)** La $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ og $x_3 = 1$.

Formelen for $p(x)$ ved Lagrangeinterpolasjon er

$$p(x) = \sum_{k=0}^{k=3}\frac{l_k(x)}{l_k(x_k)}p(x_k)$$

der

$$\begin{aligned}l_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \quad l_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)(x-x_3), \\ l_2(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3), \quad l_3(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).\end{aligned}$$

I vårt tilfelle er

$$l_0(x) = x^3 - x, \quad l_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2, \quad l_3(x) = x^3 + 3x^2 + 2x.$$

(Vi trenger ikke $l_1(x)$ siden $p(x_1) = 0$.) Det gir

$$p(x) = \frac{5}{6}(x^3 - x) - \frac{1}{2}(x^3 + 2x^2 - x - 2) + \frac{4}{6}(x^3 + 3x^2 + 2x) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Ved Newtons interpolasjonsmetode har $p(x)$ formen

$$p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

der vi finner $a_0 = p(x_0)$, $a_1 = p[x_0, x_1]$, $a_2 = p[x_0, x_1, x_2]$ og $a_3 = p[x_0, x_1, x_2, x_3]$ i en tabell med dividerte differenser:

x_i	$p(x_i)$	$p[x_i, x_{i+1}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$p[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
-2	$\boxed{-5}$			
		$\frac{0-(-5)}{-1-(-2)} = \boxed{5}$		
-1	0		$\frac{1-5}{0-(-2)} = \boxed{-2}$	
		$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$		$\frac{1-(-2)}{1-(-2)} = \boxed{1}$
0	1		$\frac{3-1}{1-(-1)} = 1$	
		$\frac{4-1}{1-0} = 3$		
1	4			

Det gir

$$p(x) = -5 + 5(x+2) - 2(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x = x^3 + x^2 + x + 1.$$

b) Ved å bruke Simpsons regel med nodene -1, 0 og 1, får vi

$$\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = \frac{1}{3}\big[p(-1) + 4p(0) + p(1)\big] = \frac{8}{3}.$$

Simpsons regel gir eksakt svar i dette tilfellet siden $p^{(4)}(x) \equiv 0$. Vi kan også vise at feilen er 0 ved å sammenligne svaret vi fikk ved Simpsons metode med integralets eksakte verdi:

$$\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 + x + 1)\,dx = 2\int_{0}^{1} (x^2 + 1)\,dx = 2\Big[\frac{1}{3}x^3 + x\Big]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

6 **a)** Vi setter approksimasjoner

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &\approx \big(u(x,t+k) - u(x,t)\big)/k \qquad \text{og} \\ u_{xx}(x,t) &\approx \big(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\big)/h^2, \end{aligned}$$

i varmeledningsligningen og vi får

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} = \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}.$$

Betrakt $r = k/h^2$, får vi Eulers metode formel

$$U_i^{j+1} = (1-2r)U_i^j + r(U_{i+1}^j + U_{i-1}^j).$$

b) Med $h = 1/4$, $k = 0.03$ får vi $r = 0.48$ og $(1-2r) = 0.04$. Vi bruker startverdiene og får $[U_1^0, U_2^0, U_3^0]^T = [2\sin(\pi/4), 2\sin(\pi/2), 2\sin(3\pi/4)]^T = [1.4142, 2, 1.4142]^T$, $U_0^0 = U_4^0 = 0$. Dermed blir

$$\begin{aligned} U_1^1 &= 0.04 \cdot 1.4142 + 0.48 \cdot 2 &&= 1.0166 \\ U_2^1 &= 0.04 \cdot 2 + 0.48 \cdot (1.4142 + 1.4142) &&= 1.4376 \\ U_3^1 &= 0.04 \cdot 1.4142 + 0.48 \cdot 2 &&= 1.0166. \end{aligned}$$