NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5013/16 Matematikk 4N eksamen 07.08.03

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2, 3ab, 4, 5, 6 og 7abc som teller likt ved bedømmelsen.

1 **a)** Fra tabellen i Rottmann har vi $\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \Gamma(n+1)/(s-a)^{n+1} = n!/(s-a)^{n+1}$. Følgelig er $\mathcal{L}(te^{-t}) = 1/(s+1)^2$, $\mathcal{L}(e^{-t}) = 1/(s+1)$, $\mathcal{L}(t) = 1/s^2$, $\mathcal{L}(1) = 1/s$ og

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}(te^{-t} + 2e^{-t} + t - 2) = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\\ &= \frac{s^2 + 2s^2(s+1) + (s+1)^2 - 2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} = \frac{1}{s^2(s+1)^2}.\end{aligned}$$

Ved å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)e^{-s}\} = f(t-1)u(t-1)\\ &= \big((t-1)e^{-(t-1)} + 2e^{-(t-1)} + (t-1) - 2\big)u(t-1)\\ &= (e(t+1)e^{-t} + t - 3)u(t-1).\end{aligned}$$

b) Vi har $r(t) = (t-1)u(t-1) = h(t-1)u(t-1)$ der $h(t) = t$. Ved skiftteorem 1 får vi da $\mathcal{L}\{r(t)\} = H(s)e^{-s} = (1/s^2)e^{-s}$, og den Laplacetransformerte av differensialligningen blir

$$\big[s^2Y - s + 1\big] + 2[sY - 1] + Y = \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Vi løser denne ligningen mhp. Y og inverstransformerer ved å bruke informasjon fra a):

$$\begin{aligned}(s^2 + 2s + 1)Y = s + 1 + \frac{1}{s^2}e^{-s} \quad &\text{dvs.} \quad (s+1)^2 Y = (s+1) + \frac{1}{s^2}e^{-s}\\ Y &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s^2(s+1)^2}e^{-s} = \frac{1}{s+1} + F(s)e^{-s}\\ y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-t} + (e(t+1)e^{-t} + t - 3)u(t-1)\\ &= \begin{cases} e^{-t} & \text{for } 0 \le t \le 1\\ (1 + e + et)e^{-t} + t - 3 & \text{for } t \ge 1.\end{cases}\end{aligned}$$

2 Fra tabell har vi $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ og $\mathcal{L}\{tf''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$. Det gir

$$\mathcal{L}\{tf''(t)\} = -\frac{d}{ds}\big[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\big] = -2sF(s) - s^2F'(s) + f(0).$$

Den Laplacetransformerte av den gitte differensialligningen blir da

$$[-2sY(s) - s^2Y'(s) + 1] + 2[sY(s) - 1] - Y'(s) = 0.$$

Ved forenkling følger

$$-(s^2+1)Y'(s) - 1 = 0 \quad \text{og dermed} \quad Y'(s) = -\frac{1}{s^2+1}.$$

Ved igjen å bruke regelen $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$ får vi, siden $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+1)\} = \sin t$,

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -Y'(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{som gir} \quad ty(t) = \sin t, \quad y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

3 **a)** For koefisientene i cosinusrekka får vi

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_1^2 dx = \frac{1}{\pi}\\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_1^2 \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_1^2 = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2n - \sin n}{n}.\end{aligned}$$

Følgelig har $f(x)$ cosinusrekke

$$\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2n - \sin n}{n}\cos nx.$$

La $S(x)$ betegne summen av rekka for vilkårlig x. For $x = 1$ og $x = -\pi/2$ får vi

$$S(1) = \frac{f(1+0) + f(1-0)}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad S\left(-\frac{\pi}{2}\right) \overset{\text{jevn}}{=} S\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

b) Dersom $u(x,t) = F(x)G(t)$ oppfyller (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\pi) = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - kG = 0$$

for en konstant k. Fra Kreyszig 11.5 (adiabatiske randbetingelser) vet vi at ikketrivie løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x) = \cos nx$ for $k = -n^2$ der $n = 0, 1, 2, \ldots$. For $G(t)$ f vi $G' + n^2G = 0$ som gir $G_n(t) = A_n e^{-n^2t}$ der A_n er en vilkårlig konstant. For $u(x,t)$ $F(x)G(t)$ får vi dermed

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n e^{-n^2t}\cos nx, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ .$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=0}^\infty u_n(x,t)$ også en løsning, og d oppfyller (ii). Vi setter følgelig $u(x,t) = \sum_{n=0}^\infty A_n e^{-n^2t}\cos nx$, og bestemmer koeffisiente A_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt:

Vi skal ha $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^\infty A_n \cos nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi $A_0 = 1$ og $A_n = (2/\pi)(\sin 2n - \sin n)/n$ for $n = 1, 2, \ldots$ og følgelig

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin 2n - \sin n}{n}e^{-n^2t}\cos nx.$$

4 De Fouriertransformerte av f og $f * f$ er

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f) = \widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{-e^{-iwx}}{iw}\right]_{-1}^1 = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w}\\ \mathcal{F}(f * f) = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\widehat{f}(w) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-iw} - e^{iw}}{w}\right)^2 = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-2iw} - 2 + e^{2iw}}{w^2}.\end{aligned}$$

Ved å bruke formelen for invers Fouriertransformert får vi, siden $(f * f)(x)$ er kontinuerl

$$(f * f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{e^{2iw} - 2 + e^{-2iw}}{w^2}e^{iwx}\,dw.$$

Setter vi $x = 3$, får vi

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{5iw} - 2e^{3iw} + e^{iw}}{w^2}\,dw = (f * f)(3) = 0$$

siden $(f*f)(3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)f(3-p)\,dp = \int_{-1}^{1} f(3-p)\,dp = \int_{2}^{4} f(t)\,dt = 0$. Det søkte integralet er, siden $e^{iaw} = \cos aw + i\sin aw$, realdelen av integralet på venstresiden. Følgelig er

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5w - 2\cos 3w + \cos w}{w^2}\,dw = 0$$

5 La $W(x,s)$ være den Laplacetransformerte av $w(x,t)$, $W(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}w(x,t)\,dt$. Laplacetransformasjon av den gitte ligningen gir

$$\frac{\partial W}{\partial x} + sW - w(x,0) = \frac{1}{s^2}, \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{\partial W}{\partial x} + sW = \frac{1}{s^2} \qquad (\text{siden } w(x,0)=0).$$

Dette er en ordinær differensialligning for $W(x,s)$ betraktet som funksjon av x. Ligningen kan da skrives $dW/dx + sW = 1/s^2$, og ved å bruke løsningen som står i oppgaven får vi

$$W(x,s) = C(s)e^{-sx} + 1/s^3.$$

Vi skal ha $w(0,t) = 0$ og følgelig $W(0,s) = 0$. Siden $W(0,s) = C(s) + 1/s^3$ følger $C(s) = -1/s^3$ og

$$W(x,s) = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s^3}e^{-xs}.$$

For å inverstransformere, bruker vi at $F(s) = 1/s^3$ har inverstransformert $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ og skiftteorem 2:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}(t-x)^2u(t-x) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{for } 0 \le t \le x \\ \frac{1}{2}x(2t-x) & \text{for } t \ge x. \end{cases}$$

6 I $T_{2n}f$ lar vi annethvert ledd gå til T_nf og R_nf henholdsvis:

$$\begin{aligned} T_{2n}f &= \frac{1/2n}{2}\big[f(-1)+f(1)\big] + \frac{1}{2n}\sum_{j=-(2n-1)}^{2n-1} f\Big(\frac{j}{2n}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\frac{1/n}{2}\big[f(-1)+f(1)\big] + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=-(2n-2)\\ j \text{ partall}}}^{2n-2} f\Big(\frac{j}{2n}\Big) + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=-(2n-1)\\ j \text{ odde}}}^{2n-1} f\Big(\frac{j}{2n}\Big)\Big\} \\ &= \frac{1}{2}\Big\{\frac{1/n}{2}\big[f(-1)+f(1)\big] + \frac{1}{n}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n} + \frac{1/n}{2}\Big)\Big\} = \frac{1}{2}\big[T_nf + R_nf\big] \end{aligned}$$

der vi innførte $j = 2k$ for partall j og $j = 2k+1$ for oddetall j.

Når $n = 2$ er

$$T_2f = \tfrac{1}{4}\big[f(-1)+f(1)\big] + \tfrac{1}{2}\big[f(-\tfrac{1}{2}) + f(0) + f(\tfrac{1}{2})\big].$$

Siden $f(t) = t\sin^2 t$ er en odde funksjon, er $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = 0$. Vi har også $f(-1)+f(1) = 0$, $f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = 0$ og $f(0) = 0$ slik at $T_2f = 0$. Trapesmetoden gir altså eksakt svar i dette tilfellet.

7 **a)** Vi innfører nye variabler $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ og får differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= (1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned} \qquad \text{med initialbetingelser} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

b) For differensialligningssystemet i a) blir "Baklengs Euler" gitt ved

$$\begin{pmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} y_{2,n+1} \\ (1-y_{1,n+1}^2)y_{2,n+1} - y_{1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Med $n = 0$, $h = 0.1$ og initialbetingelsene $y_{1,0} = 2$ og $y_{2,0} = 0$ får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= 2 + 0.1y_{2,1} \\ y_{2,1} &= 0.1\left[(1-y_{1,1}^2)y_{2,1} - y_{1,1}\right]. \end{aligned}$$

Multipliserer vi begge ligningene med 10, kan ligningssystemet skrives

$$\begin{aligned} 10y_{1,1} - y_{2,1} - 20 &= 0 \\ y_{1,1} + (9 + y_{1,1}^2)y_{2,1} &= 0. \end{aligned}$$

c) Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9+y_1^2)y_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{har Jacobimatrise} \qquad J(y_1,y_2) = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 + 2y_1y_2 & 9 + y_1^2 \end{pmatrix}.$$

For å finne $y_{1,1} = y_{1,0} + \Delta y_{1,0}$ og $y_{2,1} = y_{2,0} + \Delta y_{2,0}$, løser vi ligningen

$$J(y_{1,0}, y_{2,0})\begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} \\ \Delta y_{2,0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 10y_{1,0} - y_{2,0} - 20 \\ y_{1,0} + (9 + y_{1,0}^2)y_{2,0} \end{pmatrix}$$

med hensyn på $\begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} & \Delta y_{2,0} \end{pmatrix}^\top$. Med startverdiene $y_{1,0} = 2$ og $y_{2,0} = 0$ får vi

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} \\ \Delta y_{2,0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

som gir

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{1,0} \\ \Delta y_{2,0} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{132}\begin{pmatrix} 13 & 1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.15 \end{pmatrix}.$$

Føgelig får vi

$$y_{1,1} = 1.98 \qquad \text{og} \qquad y_{2,1} = -0.15.$$