



Opgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2, 3ab, 4ab, 5ab, 6ab, som teller likt ved bedømmelsen.

1 a) Laplacetransformerer: $[sI(s) - i(0)] + 4I(s) + 3 \cdot \frac{1}{s}I(s) = V(s)$, $i(0) = 0$

$$(s^2 + 4s + 3)I(s) = sV(s) \Rightarrow I(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 3}V(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)}V(s)$$

$$V(s) = \frac{6}{s} \Rightarrow I(s) = \frac{6}{(s+1)(s+3)} = 3 \left[\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \right] \Rightarrow i(t) = 3(e^{-t} - e^{-3t})$$

b) $v(t) = e^{-2t}u(t-2) = e^{-2(t-2)}e^{-4}u(t-2) = f(t-2)u(t-2)$

$$V(s) = F(s)e^{-2s} = \frac{1}{s+2}e^{-4}e^{-2s} = \frac{1}{s+2}e^{-2(s+2)}$$

Alternativ utregning av $V(s)$:

$$V(s) = \int_2^\infty e^{-2t} e^{-st} dt = \int_2^\infty e^{-(s+2)t} dt = \left[\frac{-1}{s+2} e^{-(s+2)t} \right]_{t=2}^\infty = \frac{1}{s+2} e^{-2(s+2)}$$

$$I(s) = \frac{s}{(s+1)(s+3)}V(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot e^{-2(s+2)}$$

$$= \left[\frac{-1/2}{s+1} + \frac{2}{s+2} - \frac{3/2}{s+3} \right] e^{-4} \cdot e^{-2s} = Y(s)e^{-2s}$$

$$i(t) = y(t-2)u(t-2)$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-(t-2)} + 2e^{-2(t-2)} - \frac{3}{2}e^{-3(t-2)} \right] e^{-4}u(t-2)$$

$$= -\frac{1}{2}[e^{-t-2} - 4e^{-2t} + 3e^{-3t+2}]u(t-2)$$

2 Laplacetransformerer ved hjelp av konvolusjonsregelen:

$$f(t) * e^{at} = \sin t \Rightarrow F(s) \cdot \frac{1}{s-a} = \frac{1}{s^2+1}$$

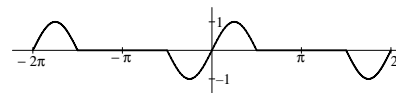
$$F(s) = \frac{s-a}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} - \frac{a}{s^2+1} \Rightarrow f(t) = \cos t - a \sin t$$

Eller, vi kan Laplacetransformere ved hjelp av skiftteorem 1 og integralregelen:

$$\int_0^\infty f(\tau)e^{-a\tau} d\tau = e^{-at} \sin t \Rightarrow \frac{1}{s}F(s+a) = \frac{1}{(s+a)^2+1}$$

$$F(s+a) = \frac{s}{(s+a)^2+1} \Rightarrow F(s) = \frac{s-a}{s^2+1} \Rightarrow f(t) = \cos t - a \sin t$$

3 a)



$$b_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin 2x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin 2x \sin 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{2}$$

For $n \neq 2$ er

$$b_n = 0 \quad \text{for } n = 2m \quad \text{og} \quad b_n = -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} \quad \text{for } n = 2m+1$$

siden $\sin(2m \cdot \pi/2) = 0$ og $\sin[(2m+1)\pi/2] = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$.

Fourierrekke til $f(x)$ er en sinusrekke, og $f(x)$ er kontinuerlig for alle x . Altså har vi

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq 2}}^\infty \frac{\sin(n\pi/2)}{(n-2)(n+2)} \sin nx$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} \sin(2m+1)x \quad \text{for alle } x.$$

b) For $x = \pi/2$ er $f(x) = 0$ og $\sin(2m+1)x = (-1)^m$. Det gir

$$0 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m-1)(2m+3)}$$

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m-1)(2m+3)} = \frac{1}{(-1) \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots = 0.$$

For å finne summen av den andre rekke, kan vi bruke Parsevals identitet:

$$\frac{1}{4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=0}^\infty \left[\frac{(-1)^m}{(2m-1)(2m+3)} \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2x dx = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(2m-1)^2(2m+3)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) / \frac{16}{\pi^2} = \frac{\pi^2}{64}$$

4 a) Setter inn $u(x, y) = F(x)G(y)$ i (i) og bruker randbetingelsene (ii).

$$F''G + FG'' = 0 \Rightarrow \frac{F''}{F} = -\frac{G''}{G} = k \quad (\text{konstant})$$

$$(I) \quad F'' - kF = 0, \quad F'(0) \stackrel{(ii)}{=} 0, \quad F'(\pi) \stackrel{(ii)}{=} 0, \quad (II) \quad G'' + kG = 0, \quad G(0) \stackrel{(ii)}{=} 0$$

Bestemmer først $F(x)$ fra (I) og deretter $G(y)$ fra (II).

- (I) $F'' - kF = 0$, k vilkårlig konstant, $F'(0) = 0$, $F'(π) = 0$
- $k > 0$, $k = μ^2$: $F(x) = Ae^{μx} + Be^{-μx}$, $F'(x) = μAe^{μx} - μBe^{-μx}$
- $F'(0) = F'(π) = 0 \Rightarrow A = B = 0$, $F(x) = 0$
- $k = 0$: $F(x) = Ax + B$, $F'(x) = A$
- $F'(0) = F'(π) = 0 \Rightarrow A = 0$, $F_0(x) = 1$ ($B = 1$)
- $k < 0$, $k = -p^2$: $F(x) = A \cos px + B \sin px$, $F'(x) = -pA \sin px + pB \cos px$
- $F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $F'(π) = 0$, $B = 0$, $A \neq 0 \Rightarrow \sin pπ = 0$
- $p = n = 1, 2, 3, \dots$, $F_n(x) = \cos nx$ ($A = 1$)
- (II) $C'' + kC = 0$, $k = 0$ og $k = -n^2$, $G(0) = 0$
- $k = 0$: $G(y) = Ay + B$, $G'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$, $G_0(y) = Ay$
- $k = -n^2$: $G(y) = Ae^{ny} + Be^{-ny}$, $G'(0) = 0 \Rightarrow B' = -A'$
- $G_n(y) = A'_n(e^{ny} - e^{-ny}) = A_n \sinh ny$ ($A_n = 2A'_n$)

Løsningene av (i) på formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ som oppfylter (ii):

$$u_0(x, y) = F_0(x)G_0(y) = Ay \quad \text{og} \quad u_n(x, y) = F_n(x)G_n(y) = A_n \cos nx \sinh ny$$

- b) For å finne en løsning av (i) som, i tillegg til (ii), også oppfylter (iii), setter vi
- $$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = Ay + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \sinh ny$$
- og bestemmer A_0, A_1, A_2, \dots slik at (iii) blir oppfylt.

$$1 - 2 \cos 2x + \cos 4x \stackrel{\text{(iii)}}{=} u(x, \pi) = A_0 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh n\pi) \cos nx$$

$$A_0 = 1/\pi, \quad A_2 = -2/\sinh 2\pi, \quad A_4 = 1/\sinh 4\pi, \quad A_n = 0 \text{ ellers}$$

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} - \frac{2}{\sinh 2\pi} \cos 2x \sinh 2y + \frac{1}{\sinh 4\pi} \cos 4x \sinh 4y$$

- [5] a) Vi setter $x_1 := x$ og $x_2 := x'$ og vi får følgende system:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1^2 e^x + x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 2 \end{matrix}$$

Vi skriver det i vektor-notasjon ved å sette $\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ slik at

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1^2 e^x + x_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_0 := \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Vi beregner ett skritt av Eulers metode på systemet: $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + h\mathbf{f}(t_0; \mathbf{x}_0)$. Vi tar $t_0 = 0$ og $h = 0.1$, for å få $\mathbf{x}(0.1) \approx \mathbf{x}_1$ og vi finner

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ e^0 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi $\mathbf{x}(0.1) \approx \mathbf{x}_1 = 1.2$.

- Vi beregner ett skritt av forbedret Eulers metode (Heun's method):

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$$

med

$$\mathbf{K}_1 = h\mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0) \quad \text{og} \quad \mathbf{K}_2 := h\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_1).$$

Med $t_0 = 0$ og $h = 0.1$ får vi

$$\mathbf{K}_1 = 0.1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 + \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_2 = 0.1 \begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.22e^{0.1} + 2.3 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.23 \\ 0.1 \cdot 1.22e^{0.1} + 0.23 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1.2150 \\ 2.3446 \end{bmatrix}$$

Dette betyr at $\mathbf{x}(0.1) \approx 1.2150$.

- b) Vi beregner lokal feil for de to metodene: $e_1^E := x(0.1) - x_1^E$ og $e_1^{FE} := x(0.1) - x_1^{FE}$
- $$|e_1^E| = |1.2165 - 1.2| = 0.0165 = (0.1^2)1.65, \quad p = 1, \quad C^E = 1.65$$

$$|e_1^{FE}| = |1.2165 - 1.2150| = 0.0015 = (0.1^3)1.5, \quad p = 2, \quad C^{FE} = 1.5,$$

approximasjonen med forbedret Eulers metode er den beste. Man kan forvente dette siden forbedret Eulers metode har orden 2 mens Eulers metode har orden 1.

- [5] a) Newtons metode for $x^n - R = 0$ gir følgende iterasjon:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^n - R}{nx_n^{n-1}}$$

For den gitte fikspunktligningen er:

$$g(\sqrt[n]{R}) = 1 - \frac{R}{(\sqrt[n]{R})^n} + \frac{R}{(\sqrt[n]{R})^{m-1}} = \frac{R}{(\sqrt[n]{R})^m} \sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{R},$$

d.v.s at $\sqrt[n]{R} = g(\sqrt[n]{R})$, og $\sqrt[n]{R}$ er et fikspunkt for ligningen $x = g(x)$.

Vi skal beregne Newtons iterasjon og iterasjonen

$$x_{n+1} = 1 - \frac{R}{x_n^n} + \frac{R}{x_n^{m-1}}$$

med $m = 2$, $R = 7/2$ og $x_0 = 2$, for å approksimere $\sqrt{7/2} = 1.8708$.

Newtons metode:

$$x_1 = 2 - \frac{4 - \frac{7}{2}}{4} = \frac{15}{8}, \quad x_2 = \frac{15}{8} - \frac{(\frac{15}{8})^2 - \frac{7}{2}}{2 \cdot \frac{15}{8}} = 1.8708.$$

Fikspunkterasjon:

$$x_1 = 1 - \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{8}, \quad x_2 = 1 - \frac{7}{2} \cdot \frac{8^2}{15^2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{15} = 1.8711, \quad x_3 = 1.8708.$$

Newtons metode tar et skritt mindre enn fikspunkterasjonen for å finne 1.8708.