NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5013 Matematikk 4N eksamen 11.05.02

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2, 3abc, 4, 5, 6, 7, 8, som teller likt ved bedømmelsen.

1 **a)** Formelen for $\sin(u+v)$ gir $\sin t = \sin[(t-a)+a] = \sin(t-a)\cos a + \cos(t-a)\sin a$. Dermed får vi, ved hjelp av transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(t-a)\sin t\} &= \cos a\,\mathcal{L}\{\sin(t-a)u(t-a)\} + \sin a\,\mathcal{L}\{\cos(t-a)u(t-a)\}\\ &= \cos a\, e^{-as}\frac{1}{s^2+1} + \sin a\, e^{-as}\frac{s}{s^2+1} = e^{-as}\frac{\cos a + s\sin a}{s^2+1}.\end{aligned}$$

Eller, ved integrasjon,

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\sin t\} = \int_a^\infty e^{-st}\sin t\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\sin t - \cos t)\right]_a^\infty = e^{-as}\frac{\cos a + s\sin a}{s^2+1}\,.$$

Vi finner $h_a(t) = \mathcal{L}^{-1}(H_a)$ ved å bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$:

$$H_a(s) = \frac{2s+3a}{s^2+2as+a^2+1} = \frac{2(s+a)+a}{(s+a)^2+1} \quad\Longrightarrow\quad h_a(t) = e^{-at}(2\cos t + a\sin t)$$

b) Differensialligningen kan skrives

$$y'' + 2y' + 2y = 5\sin t - u(t-\pi)5\sin t = 5\,[\,\sin t - g_\pi(t)\,]\,.$$

Ved å bruke resultatet i a) får vi ved Laplacetransformasjon:

$$s^2Y + 2sY + 2Y = 5\left[\frac{1}{s^2+1} - e^{-\pi s}\frac{(-1)}{s^2+1}\right] \implies Y = \frac{5}{(s^2+2s+2)(s^2+1)}(1+e^{-\pi s})$$

I den oppgitte delbrøkoppspaltingen kjenner vi igjen funksjonen $H_1(s)$ fra a). Det gir

$$\begin{aligned}Y &= \Big(H_1(s) - \frac{2s-1}{s^2+1}\Big) + e^{-\pi s}\Big(H_1(s) - \frac{2s-1}{s^2+1}\Big)\\ y &= [\,h_1(t) - 2\cos t + \sin t\,] + [\,h_1(t-\pi) - 2\cos(t-\pi) + \sin(t-\pi)\,]\,u(t-\pi).\end{aligned}$$

Siden $\cos(t-\pi) = -\cos t$ og $\sin(t-\pi) = -\sin t$, får vi

$$y = \begin{cases} e^{-t}(2\cos t + \sin t) - 2\cos t + \sin t & \text{for } 0 < t < \pi \\ e^{-t}(2\cos t + \sin t) - e^{-(t-\pi)}(2\cos t + \sin t) & \text{for } t > \pi. \end{cases}$$

2 Integralligningen kan skrives $y(t) = ke^{-bt} + e^{-bt} * y(t)$. Vi Laplacetransformerer ved å bruke konvolusjonsregelen og $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$:

$$Y = \frac{k}{s+b} + \frac{1}{s+b}\cdot Y$$

Så finner vi Y,

$$\Big(1 - \frac{1}{s+b}\Big)Y = \frac{k}{s+b} \quad\Longrightarrow\quad Y = \frac{k}{s+(b-1)}$$

og inverstransformerer ved igjen å bruke $\mathcal{L}(e^{at}) = 1/(s-a)$:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = ke^{-(b-1)t}$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi bruker delvis integrasjon for å beregne b_1:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^\pi + \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{2}\cos 2x\,dx}_{0}\right] = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Siden $b_n = (-1)^n n/(n^2-1)$ for $n \geq 2$, har $f(x) = (x/2)\cos x$ sinusrekke

$$\frac{x}{2}\cos x = -\frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{n^2-1}, \qquad 0 < x < \pi.$$

b) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen (1) og separerer variable:

$$F''G = FG'' + 2FG'\,, \qquad \frac{F''}{F} = \frac{G''+2G'}{G} = k \text{ (konstant)}, \qquad \begin{aligned} F'' - kF &= 0 \\ G'' + 2G' - kG &= 0 \end{aligned}$$

Randbetingelsene (2) medfører $F(0) = F(\pi) = 0$ og, som i Kreyszig 11.3, får vi løsninger $F(x) \not\equiv 0$ når $k = -n^2$, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ Da blir $F_n(x) = \sin nx$.

Når $k = -n^2$ får vi for $G(t)$ ligningen

$$G'' + 2G' + n^2G = 0.$$

Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 2\lambda + n^2 = 0$ har løsning $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ når $n = 1$ og $\lambda_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{n^2-1}$ når $n > 1$. Dermed blir

$$\begin{aligned} G_1(t) &= (A_1 + B_1t)e^{-t} \quad \text{for } n = 1 \\ G_n(t) &= e^{-t}(A_n\cos\omega_nt + B_n\sin\omega_nt) \quad \text{for } n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

der $\omega_n = \sqrt{n^2-1}$ og A_n, B_n er vilkårlige konstanter. For $u(x,t) = F(x)G(t)$ får vi

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= F_1(x)G_1(t) = (A_1 + B_1t)\,e^{-t}\sin x \\ u_n(x,t) &= F_n(x)G_n(t) = e^{-t}\big(A_n\cos\omega_nt + B_n\sin\omega_nt\big)\sin nx, \quad n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

c) Siden ligningen (1) er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)$ også en løsning, og den oppfyller randbetingelsene (2). Vi setter følgelig

$$u(x,t) = (A_1 + B_1t)e^{-t}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}e^{-t}\big(A_n\cos\omega_nt + B_n\sin\omega_nt\big)\sin nx$$

og bestemmer koeffisientene A_n og B_n for $n = 1,2,3,\ldots$ slik at initialbetingelsene (3) blir oppfylt. Leddvis derivasjon mhp. t gir

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \big[B_1 - (A_1 + B_1t)\big]e^{-t}\sin x \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}e^{-t}\big[(-\omega_nA_n\sin\omega_nt + \omega_nB_n\cos\omega_nt) - (A_n\cos\omega_nt + B_n\sin\omega_nt)\big]\sin nx. \end{aligned}$$

Til bestemmelse av A_n og B_n får vi dermed, når vi bruker sinusrekka i a) for $(x/2)\cos x$:

$$\text{(i)} \qquad -\frac{1}{4}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2-1} \overset{(3)}{=} u(x,0) = A_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \sin nx$$

$$\text{(ii)} \qquad 0 \overset{(3)}{=} u_t(x,0) = (B_1 - A_1)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(\omega_n B_n - A_n)\sin nx$$

Av (i) får vi $A_1 = -1/4$ og $A_n = (-1)^n n/(n^2-1)$ for $n \geq 2$. Av (ii) får vi $B_1 - A_1 = 0$ og $\omega_n B_n - A_n = 0$ for $n \geq 2$. Det gir $B_1 = A_1$ og $B_n = A_n/\omega_n$ for $n \geq 2$. Siden $\omega_n = \sqrt{n^2-1}$, blir svaret

$$u(x,t) = -\frac{1}{4}(1+t)e^{-t}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin nx}{n^2-1} e^{-t}\Big(\cos\sqrt{n^2-1}\,t + \frac{\sin\sqrt{n^2-1}\,t}{\sqrt{n^2-1}}\Big).$$

4 For $\widehat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$ får vi

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-iwx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-iwx}}{-iw}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{iw} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(\cos w + i\sin w) - (\cos w - i \sin w)}{iw} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}\,.$$

Ved å bruke formelen for invers Fouriertransformasjon får vi

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}\,dw = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w}(\cos wx + i \sin wx)\,dw.$$

Vi setter $x = 2$, tar realdelen av integralet, og bruker at $f(x)$ er kontinuerlig (og reell) for $x = 2$. Det gir

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin w}{w}\cos 2w\,dw = f(2) = 0, \qquad \text{og følgelig} \qquad \int_{0}^{\infty}\frac{\sin w \cos 2w}{w}\,dw = 0$$

siden $\sin w \cos 2w/w$ er en jevn funksjon.

5 Vi bruker Newtons dividerte differensers metode:

x_i	$f[x_i] = y_i$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
1	2			
		$\frac{1-2}{1.5-1} = -2$		
1.5	1		$\frac{-1+2}{2-1} = 1$	
		$\frac{0.5-1}{2-1.5} = -1$		$\frac{1/3-1}{3-1} = -\frac{1}{3}$
2	0.5		$\frac{-0.5+1}{3-1.5} = \frac{1}{3}$	
		$\frac{0-0.5}{3-2} = -0.5$		
3	0			

interpolasjonspolynomet i Newtons form er

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + \cdots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}),$$

og i tilfellet vårt

$$p_3(x) = 2 - 2(x-1) + (x-1)(x-1.5) - 1/3(x-1)(x-1.5)(x-2),$$

$$p_3(x) = -0.3333x^3 + 2.5x^2 - 6.6667x + 6.5.$$

$\boxed{6}$ Ved bruk av Crank-Nicolsons skjema med $n = 4$ for den oppgitte PDL får man

$$\begin{array}{lrcl} i=1 & (2+2r)U_1^{j+1} - r(U_2^{j+1} + U_0^{j+1}) & = & (2-2r)U_1^j + r(U_2^j + U_0^j) \\ i=2 & (2+2r)U_2^{j+1} - r(U_3^{j+1} + U_1^{j+1}) & = & (2-2r)U_2^j + r(U_3^j + U_1^j) \\ i=3 & (2+2r)U_3^{j+1} - r(U_4^{j+1} + U_2^{j+1}) & = & (2-2r)U_3^j + r(U_4^j + U_2^j). \end{array}$$

Fra randbetingelsene har vi at $U_0^k = U_4^k = 0$ for alle k, og ved å substituere dem i systemet får vi

$$\begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 \\ -r & 2+2r & -r \\ 0 & -r & 2+2r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = (2-2r) \begin{bmatrix} U_1^0 \\ U_2^0 \\ U_3^0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} U_2^0 \\ U_3^0 + U_1^0 \\ U_2^0 \end{bmatrix}.$$

Fra initialbetingelsene får vi $[U_1^0, U_2^0, U_3^0] = [\sin(\pi/2), \sin(\pi), \sin(3/2\pi)] = [1, 0, -1]$, og med $r = 1/2$ får vi systemet

$$\begin{bmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{7}$ For den ikkelineære ligningen

$$x^2 + e^x - 1 = 0$$

har vi

$$f(x) = x^2 + e^x - 1, \qquad f'(x) = 2x + e^x,$$

og Newtons iterasjon er

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/(f'(x_n)).$$

Siden $x_0 = -1$ får vi

$$x_1 = -1 - \frac{1 + e^{-1} - 1}{-2 + e^{-1}} = -0.7746,$$

$x_2 = -0.7186$ og $x_3 = -0.7146$. Residualet er $f(x_3) = 2.0604e - 05$.

$\boxed{8}$ Vi bruker Heuns metode for å finne en tilnærmelse til $y(0.1)$, med y løsning av diffligning

$$\begin{array}{rcl} y' & = & y^2 + t \\ y(0) & = & 1. \end{array}$$

Vi har $t_0 = 0$, $t_1 = h = 0.1$, vi får

$$\begin{array}{rcl} Y & = & y_0 + h(y_0^2 + t_0) \qquad\qquad\quad = \; 1 + h \\ y_1 & = & y_0 + h/2(y_0^2 + t_0 + Y^2 + t_1) \;\; = \; 1 + h/2(1 + (1+h)^2 + h), \end{array}$$

og $y_1 = 1 + 0.1/2(1 + 1.1^2 + 0.1) = 1.1155$.