NTNU
Institutt for matematiske fag

SIF5013 Matematikk 4N eksamen 14.05.03

Løsningsforslag

Oppgavesettet har 11 punkter, 1ab, 2abc, 3, 4, 5ab og 6ab, som teller likt ved bedømmelsen.

1 a) Vi har

$$h(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau = e^{-2t} * f(t) \qquad \text{og følgelig} \qquad H(s) = \frac{1}{s+2} \cdot F(s)$$

ved konvolusjonsregelen. Alternativt kan vi starte med $\mathcal{L}\{e^{2t} f(t)\} = F(s-2)$ ifølge skiftteorem 1, da er $\mathcal{L}\{\int_0^t e^{2\tau} f(\tau)\, d\tau\} = (1/s)F(s-2)$ ifølge integralregelen og dermed $\mathcal{L}\{e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} f(\tau)\, d\tau\} = (1/(s+2))F((s+2)-2) = F(s)/(s+2)$ ved skiftteorem 1.

For $h(t)$ får vi ved å bruke skiftteorem 1 i (1) og skiftteorem 2 i (2):

$$(1) \qquad H(s) = \frac{F(s)}{s+2} = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1} \quad \text{og følgelig} \quad h(t) = e^{-t}\sin t$$

$$(2) \qquad H(s) = \frac{F(s)}{s+2} = \frac{1}{s+2}\Big(\frac{s+2}{s^2}\Big)e^{-s} = \frac{1}{s^2}e^{-s} \quad \text{og følgelig} \quad h(t) = (t-1)u(t-1).$$

b) La $Y(s)$ være den Laplacetransformerte av $y(t)$. Laplacetransformerer vi det gitte initialverdiproblemet, får vi

$$\big[s^2 Y - s\cdot 1\ - 0\big] + 4\big[sY - 1\big] + 4Y = F(s) + \frac{2}{s}F(s) = \frac{s+2}{s}F(s).$$

Siden $s^2+4s+4 = (s+2)^2$ og $s+4 = (s+2)+2$ får vi

$$Y = \frac{(s+2)+2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s(s+2)}F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} + \frac{1}{s}H(s)$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = e^{-2t} + 2te^{-2t} + \int_0^t h(\tau)\, d\tau \qquad \text{slik at} \qquad g(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t}.$$

2 a) For koeffisientene i sinusrekka får vi

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_1^2 \frac{\pi}{2}\sin nx\, dx = -\frac{\cos nx}{n}\bigg|_1^2 = \frac{\cos n - \cos 2n}{n}.$$

Følgelig har $f(x)$ sinusrekke

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n - \cos 2n}{n}\sin nx.$$

Vi setter inn $x = \pi/2$. Når $n = 2m$ er $\sin(n\pi/2) = \sin m\pi = 0$ og når $n = 2m+1$ er $\sin(n\pi/2) = \sin(m\pi + \pi/2) = \cos m\pi = (-1)^m$. Siden f er kontinuerlig for $x = \pi/2$ følger

$$\sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{\cos(2m+1) - \cos(4m+2)}{2m+1} = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Dersom $u(x,t) = F(x)G(t)$ oppfyller (i) og (ii), må vi ha

$$F'' - kF = 0, \quad F(0) = 0, \quad F(\pi) = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - (k-1)G = 0$$

for en konstant k. Fra Kreyszig 11.3 vet vi at ikketrivielle løsninger for $F(x)$ blir $F_n(x)$ $\sin nx$ for $k = -n^2$ der $n = 1, 2, 3, \ldots$. For $G(t)$ får vi $G' + (n^2+1)G = 0$ som $G_n(t) = C_n e^{-(n^2+1)t}$ der C_n er en vilkårlig konstant. For $u(x,t) = F(x)G(t)$ får vi derm

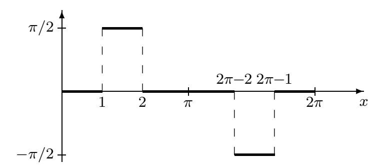
$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = C_n e^{-(n^2+1)t}\sin nx, \qquad n = 1,2,3,\ldots\ .$$

Siden (i) er lineær og homogen, er summen $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty u_n(x,t)$ også en løsning, og d oppfyller (ii). Vi setter følgelig $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty C_n e^{-(n^2+1)t}\sin nx$, og bestemmer koeffi entene C_n slik at betingelsen (iii) blir oppfylt.

Vi skal ha $f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^\infty C_n \sin nx$ for $0 < x < \pi$. Fra punkt a) får vi C_n $(\cos n - \cos 2n)/n$ og følgelig

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n - \cos 2n}{n} e^{-(n^2+1)t}\sin nx.$$

c) Grafen til $f^*(x)$ på intervallet $0 < x < 2\pi$:



Funksjonen $f^*(x)$ kan representeres ved Fouriersinusrekka vi fant i a). En rekkeløsning y_p er da av formen $y_p = \sum_{n=1}^\infty (A_n\cos nx + B_n \sin nx)$. Vi deriverer leddvis og setter in differensialligningen $y'' + 3y = f^*(x)$ for å bestemme koeffisientene A_n og B_n:

$$\sum_{n=1}^\infty(-n^2 A_n\cos nx - n^2 B_n\sin nx) + 3\sum_{n=1}^\infty(A_n\cos nx + B_n\sin nx) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos n - \cos 2n}{n}\sin n$$

Da må vi ha $(-n^2+3)A_n = 0$ og følgelig $A_n = 0$, og

$$(-n^2+3)B_n = \frac{\cos n - \cos 2n}{n} \qquad \text{og følgelig} \qquad B_n = \frac{\cos 2n - \cos n}{n(n^2-3)}.$$

En partikulær løsning blir dermed

$$y_p = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos 2n - \cos n}{n(n^2-3)}\sin nx \qquad (\text{og } y = C_1\cos\sqrt{3}\,x + C_2\sin\sqrt{3}\,x + y_p).$$

3 a) Den Fouriertransformerte av $f(x)$ er

$$\widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-(1+iw)x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{e^{-(1+iw)x}}{1+iw}\right]_0^\infty = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,(1+iw)}.$$

(Vi brukte at $\lim_{x\to\infty} e^{-(1+iw)x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{-iwx} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(\cos wx - \sin wx) =$

Siden $\widehat{h}(w) = 2\pi\,\widehat{f}(w)\cdot\widehat{f}(w)$ følger av konvolusjonsregelen at

$$h(x) = \mathcal{F}^{-1}\{\widehat{h}(w)\} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\,(f*f)(x) = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-p)f(p)\,dp.$$

Når $p < 0$ er $f(p) = 0$, og når $p > x$, dvs. $x - p < 0$, er $f(x-p) = 0$. Følgelig er $h(x) = \sqrt{2\pi}\int_0^x f(x-p)f(p)\,dp$. Dermed får vi $h(x) = 0$ når $x < 0$ og

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-(x-p)}e^{-p}\,dp = \sqrt{2\pi}\int_0^x e^{-x}\,dp = \sqrt{2\pi}\,e^{-x}p\Big|_{p=0}^{x} = \sqrt{2\pi}\,xe^{-x} \quad \text{når } x > 0.$$

4 La $W(x,s)$ være den Laplacetransformerte av $w(x,t)$, $W(x,s) = \int_0^\infty e^{-st}w(x,t)\,dt$. Laplacetransformasjon av den gitte ligningen gir

$$2x\big[sW - w(x,0)\big] + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \text{dvs.} \qquad \frac{\partial W}{\partial x} = -2xsW \qquad (\text{siden } w(x,0) = 0).$$

Dette er en ordinær differensialligning for $W(x,s)$ betraktet som funksjon av x. Ligningen kan da skrives $dW/W = -2xs\,dx$. Ved integrasjon får vi $\ln|W| = -x^2s + C_1(s)$ som gir

$$W(x,s) = \pm e^{-x^2s + C_1(s)} = C(s)e^{-x^2s}$$

(der $C(s) = \pm e^{C_1(s)}$). Vi skal ha $w(0,t) = f(t) = t^2$, følgelig er $C(s) = W(0,s) = 2/s^3$ og $W(x,s) = (2/s^3)e^{-x^2s}$. Inverstransformering ved hjelp av skiftteorem 2 gir

$$w(x,t) = f(t-x^2)u(t-x^2) = (t-x^2)^2u(t-x^2) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < x^2 \\ (t-x^2)^2 & \text{for } t > x^2. \end{cases}$$

5 **a)** De tre kardinalfunksjonene blir:

$$L_0(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 6)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = -(x^2 - 4x + 3)$$
$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2)$$

Polynomet som interpolerer $f(x)$ er da gitt som

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f_0L_0(x) + f_1L_1(x) + f_2L_2(x) \\ &= 1\cdot\frac{1}{2}(x^2-5x+6) - 8\cdot(x^2-4x+3) + 27\cdot\frac{1}{2}(x^2-3x+2) \\ &= \frac{1}{2}(12x^2 - 22x + 12) = 6x^2 - 11x + 6. \end{aligned}$$

Et interpolasjonspolynom er unikt, gitt at x-verdiene er distinkte. Så om vi istedet hadde brukt Newton-interpolasjon, hadde svaret blitt det samme.

b) La

$$P_3(x) = P_2(x) + c\cdot g(x)$$

være 3. gradspolynomet som interpolerer $f(x)$ for de fire datapunktene, $x_0,\ldots,x_3$. Vi må kreve at $P_3(x_i) = P_2(x_i)$, $i = 0,\ldots,2$. Dette gir at $g(x_i) = 0$, $i = 0,\ldots,2$ og gir

$$g(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = (x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$$

Konstanten c bestemmes ved å kreve

$$P_3(x_3) = f(x_3)$$

som gir opphav til

$$c = \frac{f(x_3) - P_2(x_3)}{g(x_3)} = 1.$$

Dvs.

$$P_3(x) = (6x^2 - 11x + 6) + 1\cdot(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = x^3.$$

Siden $P_3(x)$ interpolerer $f(x)$ i fire distinkte punkter og $f(x)$ er et 3. gradspolynom m $P_3(x) = f(x)$ og dermed er

$$f(x) = x^3.$$

6 **a)**

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} g(y(t))\,dt \overset{\text{Trapes}}{\approx} \frac{1}{2}(t_{n+1} - t_n)(g(y_{n+1}) + g(y_n)).$$
$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2}h(g(y_{n+1}) + g(y_n)),$$

der $h = t_{n+1} - t_n$. Dvs.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(g(y_{n+1}) + g(y_n)).$$

b) TRAPESMETODEN:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(g(y_{n+1}) + g(y_n))$$
$$\left[y_{n+1} - \frac{1}{2}hg(y_{n+1})\right] - \left[y_n + \frac{1}{2}hg(y_n)\right] = 0$$
$$\left[u - \frac{1}{2}h\left(\frac{50}{u} - 50u\right)\right] - \left[y_0 + \frac{1}{2}h\left(\frac{50}{y_0} - 50y_0\right)\right] = 0$$

Vi velger da

$$A = 1 + 25h, \qquad B = -\left[(1-25h)y_0 + 25h\frac{1}{y_0}\right], \qquad C = -25h,$$

slik at

$$Au + B + C\frac{1}{u} = 0.$$

Med $y_0 = \sqrt{2}$ og $h = 0.1$ får vi:

$$\begin{aligned} A &= 1 + 25\cdot 0.1 = 3.5 \\ B &= -\left[(1 - 25\cdot 0.1)\cdot\sqrt{2} + 25\cdot 0.1\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0.35355 \\ C &= -25\cdot 0.1 = -2.5. \end{aligned}$$

For å finne u kan vi enten bruke en iterativ metode, som f.eks. Newtons metode, eller kan løse den direkte ved å skrive:

$$Au^2 + Bu + C = 0,$$

sette inn verdiene for A, B og C ovenfra og løse ut. Eneste positive løsning gir $u = 0.79$

Om vi velger å bruke Newtons metode, kan vi sette

$$f(u) = Au + B + C/u$$
$$f'(u) = A - C/u^2$$

og bruke

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - \frac{f(u^{(k)})}{f'(u^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Vi kan velge $u^{(0)} = y_0 = \sqrt{2}$ og får følgende iterasjonstabell:

k	$u^{(k)}$
0	$\sqrt{2}$
1	1.66989
2	0.78386
3	0.79605
4	0.79615
5	0.79615

Etter 5 iterasjoner endrer ikke de 4 første sifrene seg, og vi konkluderer med at $u = 0.7962$.

BAKLENGS-EULER:

$$y_{n+1} = y_n + hg(y_{n+1})$$
$$[y_{n+1} - hg(y_{n+1})] - y_n = 0$$
$$\left[u - h\left(\frac{50}{u} - 50u\right)\right] - y_0 = 0$$

Vi velger da

$$A = 1 + 50h, \qquad B = -y_0, \qquad C = -50h$$

slik at

$$Au + B + C\frac{1}{u} = 0.$$

Med $y_0 = \sqrt{2}$ og $h = 0.1$ får vi:

$$A = 1 + 50 \cdot 0.1 = 6, \qquad B = -\sqrt{2}, \qquad C = -50 \cdot 0.1 = -5.$$

For å finne u kan vi enten bruke en iterativ metode, som f.eks. Newtons metode, eller vi kan løse den direkte ved å skrive:

$$Au^2 + Bu + C = 0,$$

sette inn verdiene for A, B og C ovenfra og løse ut. Eneste positive løsning gir $u = 1.0383$.

Newtons metode: På samme måte som for Trapesmetoden.

k	$u^{(k)}$
0	$\sqrt{2}$
1	0.99827
2	1.03760
3	1.03830
4	1.03830

Etter 4 iterasjoner endrer ikke de 4 første sifrene seg, og vi konkluderer med at $u = 1.0383$.