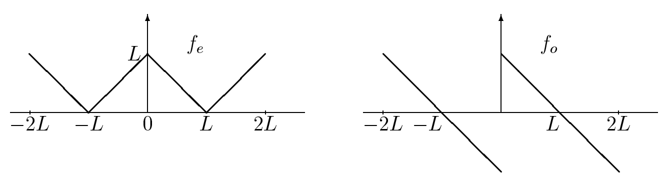
Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag
Eksamen 19.05.99 i SIF5013/14

Oppgave 1



a)

Finner fourier (cosinus) rekka til f_e:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)dx = L$$

For $n>0$:
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L (L-x)\cos\frac{\pi n x}{L} \overset{x=Ls}{=} 2L\int_0^1 (1-s)\cos(\pi n s)ds$$
$$= 2L[\frac{1}{\pi n}(1-s)\sin \pi n s - \frac{1}{(\pi n)^2}\cos \pi n s]_0^1 =$$
$$2L[-\frac{\cos \pi n s}{(\pi n)^2}]_0^1 = \begin{cases} \frac{4L}{(\pi n)^2}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4, \end{cases}$$

Dette gir $\underline{\underline{f_e(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}\frac{\cos(\frac{\pi n x}{L})}{n^2}}}$

b) Siden $f_e(x) = L - x$ for $0 \le x \le L$, må vi finne en x-verdi som passer. For $x = L/4$ vil $\cos(\frac{\pi n L/4}{L}) = \cos(\frac{\pi n}{4})$, d.v.s. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\cdots$, når $n = 1,3,5,7,\cdots$. Dette gir oss

$$L - \frac{L}{4} = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \cdots),$$

eller

$$\underline{\underline{(1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots) = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{16}}}$$

c) Vi setter inn $u(x,t) = X(x)T(t)$ og får som vanlig at

$$X''/X = T'/T = \mu, \quad X'(0) = X'(2) = 0.$$

Siden $X'' - \mu X = 0$, finner vi for $\mu > 0$ at $X(x) = A\ \exp(\sqrt{\mu}x) + B\ \exp(-\sqrt{\mu}x)$, dvs. $X'(x) = \sqrt{\mu}(Ae^{\sqrt{\mu}x} - Be^{-\sqrt{\mu}x})$. Siden $X'(0) = X'(2) = 0$, må $A = B = 0$.

For $\mu = 0$ blir $X(x) = Ax + B$, $X'(x) = A$, og følgelig er $X(x) = B$ en akseptabel løsning. For T får vi $T' = 0$, som gir at $\underline{\underline{u_0(x,t) = 1}}$ er en av basisløsningene.

For $\mu < 0$ setter vi $\mu = -\lambda^2$ slik at $X'' + \lambda^2 X = 0$. Vi får $X(x) = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x$. Siden $X'(x) = \lambda A\cos\lambda x - \lambda B\sin(\lambda x)$ og $X'(0) = X'(2) = 0$, vil $A = 0$, og $\sin\lambda 2 = 0$, dvs. $2\lambda = \pi n$, $n = 1,2,3,\cdots$. Dermed vil $X_n(x) = \cos(\frac{\pi n}{2}x)$ og $T_n' + (\frac{\pi n}{2})^2 T_n = 0$. Løsningen for $T_n(t)$ blir $\exp(-(\frac{\pi n}{2})^2 t)$, og tilsammen får vi $\underline{\underline{u_n(x,t) = e^{-(\frac{\pi n}{2})^2 t}\cos(\frac{\pi n}{2}x)}}$, $n = 1,2,3,\cdots$.

Generell løsning på denne formen:

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t).$$

d) Siden $u(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(\frac{\pi n}{2}x)$, ser vi for (i) at $\underline{\underline{u_i(x,t) = 4 + 2e^{-(\frac{3\pi}{2})^2 t}\cos\frac{3\pi}{2}x}}$ (n=0 og 3).

For (ii) benytter vi rekka i (a) med $L = 2$:

$$2 - x = u(x,0) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}\frac{1}{n^2}\cos(\frac{\pi n x}{2})$$

Dermed blir

$$\underline{\underline{u(x,t) = 1 + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\cdots}\frac{1}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}e^{-(\frac{\pi n}{2})^2 t}}}$$

Oppgave 2

a) Ligningen er $f + e^{-t} * f = t$, og følgelig blir $F + \mathcal{L}(e^{-t}) \cdot F = \mathcal{L}(t)$, dvs. $F(s) + \frac{1}{s+1}F(s) = \frac{1}{s^2}$. Dermed finner vi $F(s) = \frac{s+1}{(s+2)s^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{4}\frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2}$, og

$$\underline{\underline{f(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t.}}$$

b) Det enkleste er å bruke tabellen:
$f(t) = \sin t - u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$, dvs

$$\underline{\underline{F(s)}} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1}e^{-2\pi s} = \underline{\underline{(1-e^{-2\pi s})/(1+s^2)}}$$

(Kan også løses direkte: $F(s) = \int_0^{2\pi} e^{-st}\sin t\, dt = [\frac{e^{-st}(-s\sin t - \cos t)}{s^2+1}]_0^{2\pi}$)

c) Vi laplace-transformerer ligningen og får:

$$sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s^2+1}(1-e^{-2\pi s}).$$

Dette gir oss

$$Y(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2}\frac{1}{s^2+1}(1-e^{-2\pi s}).$$

Delbrøkoppspaltning:

$$\frac{1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5}[\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1}].$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{6}{5}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{5}(\frac{2}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1}) \\
&\quad - \frac{1}{5}(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5}\frac{1}{s^2+1})e^{-2\pi s} \\
\underline{\underline{y(t)}} &= \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t \\
&\quad - \frac{1}{5}[e^{-2(t-2\pi)} - \cos(t-2\pi) + 2\sin(t-2\pi)]u(t-2\pi) \\
&= \underline{\underline{\begin{cases} \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t, & 0 \le t < 2\pi \\ \frac{6}{5}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-2(t-2\pi)}, & 2\pi \le t \end{cases}}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\cos t e^{-t^2}) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{it}e^{-t^2} + e^{-it}e^{-t^2}) \\
&= \frac{1}{2}[\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega-1) + \mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega+1)].
\end{aligned}$$

Fouriertransformen for e^{-t^2} står i Rotmann, men kan også enkelt finnes fra tabellen:

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \mathcal{F}(e^{-(\sqrt{2}t)^2/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2\pi}e^{-(\omega/\sqrt{2})^2/2} = \sqrt{\pi}e^{-\omega^2/4}.$$

Dermed blir $\underline{\underline{\mathcal{F}(\cos t e^{-t^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(e^{-\frac{(\omega-1)^2}{4}} + e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}})}}$.

(Der er mulig å regne dette ut direkte, siden f.eks. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-it}e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+it(1+\omega)-\frac{(1+\omega)^2}{4})}e^{-\frac{(1+\omega)^2}{4}} = e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+i(1+\omega))^2}dt = \sqrt{\pi}e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}}$. Argumentet for at integralet fremdeles er $\sqrt{\pi}$ går imidlertid ut over pensum i dette kurset.)

b) Vi finner fouriertransformen til resultatet

(i) $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f(t+1) + f(t-1)] = \frac{1}{2}e^{-i\omega}\hat{f}(\omega) + \frac{1}{2}e^{i\omega}f(\omega) = \cos\omega \hat{f}(\omega)$. Dermed blir $\underline{\underline{\hat{h}_i(\omega) = \cos\omega.}}$

(ii) $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|} * f)$, dvs., $\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2}\frac{2}{1+\omega^2}\hat{f}(\omega)$, og $\underline{\underline{\hat{h}_{ii}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}}}$.

c) Vi har

$$\begin{aligned}
E(g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 1\,|\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = E(f),
\end{aligned}$$

siden $|\hat{h}(\omega)| \le 1$ for både $\hat{h}_i$ og $\hat{h}_{ii}$.

Oppgave 4

a) Vi skriver dividert differensetabeller på formen

$$\begin{array}{c|llll} x_0 & f(x_0) & & & \\ x_1 & f(x_1) & [x_1x_0] & & \\ x_2 & f(x_2) & [x_2x_1] & [x_2x_1x_0] & \\ x_3 & f(x_3) & [x_3x_2] & [x_3x_2x_1] & [x_3x_2x_1x_0]. \end{array}$$

Dette gir tabellen

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & & & \\ 1 & -1 & -2 & & \\ 4 & 1 & 2/3 & 2/3 & \\ 6 & -1 & -1 & -1/3 & -1/6 \end{array}$$

for datasett i), og tabellen

$$\begin{array}{c|cccc} 4 & 1 & & & \\ 1 & -1 & 2/3 & & \\ 6 & -1 & 0 & -1/3 & \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & -1/6 \end{array}$$

for datasett ii).

b) Interpolasjonpolynomet kan skrives på formen

$$p = f(x_0) + [x_1x_0](x - x_0) + [x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+[x_3x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Ved bruk av tabellene i **(a)** finner vi dermed

$$p_1(x) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-4) = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

og

$$p_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-4) - \frac{1}{3}(x-4)(x-1) - \frac{1}{6}(x-4)(x-1)(x-6) = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

Vi ser at $p_1(x) = p_2(x)$. Dette er ellers opplagt siden begge tredjegradspolynomene går gjennom de samme 4 punktene.

Oppgave 5

a) Vi deler intervallet $[0, 1]$ i $N = 1/h$ deler med lengde h og betrakter den ukjente funksjonen i de diskrete punktene $x_m = mh$, $m = 0, ..., N$. Det samme gjør vi med tidspunktene $t_n = nk$, $n = 0, 1, 2, ...$ Forlengs Euler for problemet i oppgaven blir da

(1) $$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \qquad 1 \le m \le (N-1), \quad n \ge 0;$$

(2) $$u_0^n = u_N^n = 0, \qquad n \ge 1.$$

b) Ved å bruke algoritmen i **(a)** får vi likningene som gir oss $x = u_6^1$, $y = u_5^2$ og $z = u_5^3$. Siden

$$u_5^0 = \cos(\pi(x_5 - 1/2)) = 1,$$
$$\frac{u_6^1 - u_6^0}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_7^0 - 2u_6^0 + u_5^0}{h^2},$$

får vi med

$$u_7^0 = \cos(\pi(x_7 - 1/2)) = 0.8090,$$
$$u_6^0 = \cos(\pi(x_6 - 1/2)) = 0.9511,$$

at $\underline{\underline{x = u_6^1 = 0.9133}}$ (Den numeriske løsningen må være symmetrisk om $x = 0.5$ siden problemet er det. Det betyr at vi uten videre kunne sagt $u_6^1 = u_4^1$).
Videre får vi

$$\frac{u_5^2 - u_5^1}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_6^1 - 2u_5^1 + u_4^1}{h^2}$$

som gir $\underline{\underline{y = u_5^2 = 0.9222}}$. Likningen

$$\frac{u_5^3 - u_5^2}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_6^2 - 2u_5^2 + u_4^2}{h^2}$$

gir oss $\underline{\underline{z = u_5^3 = 0.8856}}$.

(*NB*: Tabelen i oppgaven er feil for elementet u_7^1. Dette er uten betydning for svaret).