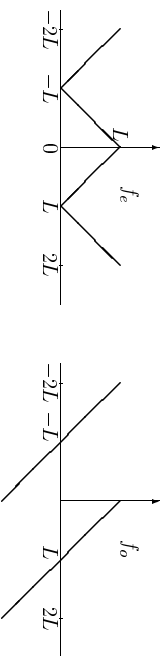




Løsningsforslag
Eksamen 19.05.99 i SIF5013/14



a) Finner fourier (cosinus) rekka til f_e :

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) dx = L$$

$$\begin{aligned} \text{For } n > 0: \quad a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L (L-x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx = 2L \int_0^1 (1-s) \cos(\pi n s) ds \\ &= 2L \left[\frac{1}{\pi n} (1-s) \sin \pi n s - \frac{1}{(\pi n)^2} \cos \pi n s \right]_0^1 = \\ &= 2L \left[-\frac{\cos \pi n s}{(\pi n)^2} \right]_0^1 = \begin{cases} \frac{4L}{(\pi n)^2}, & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0, & n = 2, 4, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{ Dette gir } \underline{\underline{f_e(x) \sim \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos(\frac{\pi n x}{L})}{n^2}}}$$

b) Siden $f_e(x) = L-x$ for $0 \leq x \leq L$, må vi finne en x -verdi som passer. For $x = L/4$ vil $\cos(\frac{\pi n L/4}{L}) = \cos(\frac{\pi n}{4})$, d.v.s. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots$, når $n = 1, 3, 5, 7, \dots$. Dette gir oss

$$L - \frac{L}{4} = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \dots \right),$$

eller

$$\underline{\underline{\frac{1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots}{3^2 - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \dots} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}}}$$

c) Vi setter inn $u(x, t) = X(x)T(t)$ og får som vanlig at

$$X''/X = T'/T = \mu, \quad X'(0) = X'(2) = 0.$$

Siden $X'' - \mu X = 0$, finner vi for $\mu > 0$ at $X(x) = A \exp(\sqrt{\mu}x) + B \exp(-\sqrt{\mu}x)$, dvs. $X'(x) = \sqrt{\mu}(Ae^{\sqrt{\mu}x} - Be^{-\sqrt{\mu}x})$. Siden $X'(0) = X'(2) = 0$, må $A = B = 0$.

For $\mu = 0$ blir $X(x) = Ax + B$, $X'(x) = A$, og følgende er $X(x) = B$ en akseptabel løsning. For T får vi $T' = 0$, som gir at $\underline{\underline{u_0(x, t) = 1}}$ er en av basisløsningene.

For $\mu < 0$ setter vi $\mu = -\lambda^2$ slik at $X'' + \lambda^2 X = 0$. Vi får $X(x) = A \sin \lambda x + B \cos \lambda x$. Siden $X'(x) = \lambda A \cos \lambda x - \lambda B \sin \lambda x$ og $X'(0) = X'(2) = 0$, vil $A = 0$, og $\sin \lambda 2 = 0$, dvs. $2\lambda = \pi n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Dermed vil $X_n(x) = \cos(\frac{\pi n}{2} x)$ og $T_n'' + (\frac{\pi n}{2})^2 T_n = 0$. Løsningen for $T_n(t)$ blir $\exp(-(\frac{\pi n}{2})^2 t)$, og til sammen får vi $\underline{\underline{u_n(x, t) = e^{-(\frac{\pi n}{2})^2 t} \cos(\frac{\pi n}{2} x)}}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Generell løsning på denne formen:

$$u(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x, t).$$

d) Siden $u(x, 0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\frac{\pi n}{2} x)$, ser vi for (i) at $\underline{\underline{u(x, t) = 4 + 2e^{-(\frac{\pi}{2})^2 t} \cos \frac{3\pi}{2} x}}$ ($n=0$ og 3).

For (ii) benytter vi rekka i (a) med $L = 2$:

$$2 - x = u(x, 0) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right)$$

Dermed blir

$$\underline{\underline{u(x, t) = 1 + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{\pi n x}{2} e^{-(\frac{\pi n}{2})^2 t}}}$$

Oppgave 2

- a) Ligningen er $f + e^{-t} * f = t$, og følgende blir $F + \mathcal{L}(e^{-t}) \cdot F = \mathcal{L}(t)$, dvs. $F(s) + \frac{1}{s+1}F(s) = \frac{1}{s^2}$.
Dermed finner vi $F(s) = \frac{s+1}{(s+1)s^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2}$, og

$$f(t) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}t}}$$

- b) Det enkleste er å bruke tabellen:

$$f(t) = \sin t - u(t - 2\pi) \sin(t - 2\pi), \text{ dvs}$$

$$\underline{\underline{F(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1} e^{-2\pi s} = \frac{(1 - e^{-2\pi s})}{(1 + s^2)}}}$$

$$\text{(Kan også løses direkte: } F(s) = \int_0^{2\pi} e^{-st} \sin t \, dt = \left[\frac{e^{-st}(-s \sin t - \cos t)}{s^2 + 1} \right]_0^{2\pi}$$

- c) Vi Laplace-transformerer ligningen og får:

$$sY - 1 + 2Y = \frac{1}{s^2 + 1} (1 - e^{-2\pi s}).$$

Dette gir oss

$$Y(s) = \frac{1}{s + 2} + \frac{1}{s + 2} \frac{1}{s^2 + 1} (1 - e^{-2\pi s}).$$

Delbrøkkoppsettning:

$$\frac{1}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{5} \frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + 2 \frac{1}{s^2+1}.$$

Dette gir

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{6}{5} \frac{1}{s+2} + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{2}{5} \frac{1}{s^2+1} \right) e^{-2\pi s} \\ \underline{\underline{g(t)}} &= \frac{6}{5} e^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t \\ &\quad - \frac{1}{5} [e^{-2(t-2\pi)} - \cos(t-2\pi) + 2 \sin(t-2\pi)] u(t-2\pi) \\ &= \begin{cases} \frac{6}{5} e^{-2t} - \frac{1}{5} \cos t + \frac{2}{5} \sin t, & 0 \leq t < 2\pi \\ \frac{6}{5} e^{-2t} - \frac{1}{5} e^{-2(t-2\pi)}, & 2\pi \leq t \end{cases} \end{aligned}$$

Oppgave 3

- a)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\cos te^{-t^2}) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}(e^{it} e^{-t^2} + e^{-it} e^{-t^2}) \\ &= \frac{1}{2} [\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega - 1) + \mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega + 1)]. \end{aligned}$$

Fouriertransformen for $e^{-\sqrt{2}t^2}$ står i Rotmann, men kan også enkelt finnes fra tabellen:

$$\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \mathcal{F}(e^{-(\sqrt{2}t)^2/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\pi} e^{-(\omega/\sqrt{2})^2/2} = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

$$\text{Dermed blir } \underline{\underline{\mathcal{F}(\cos te^{-t^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (e^{-\frac{\omega^2}{4}} + e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}})}}.$$

(Der er mulig å regne dette ut direkte, siden føkts.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-it} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2 + t(1+\omega))} e^{-\frac{(1+\omega)^2}{4}} dt = e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t + \frac{1+\omega}{2})^2} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{(\omega+1)^2}{4}}. \text{ Argumentet for at integralet fremdeles er } \sqrt{\pi} \text{ går innidlertid ut over pensum i dette kurset.)}$$

- b) Vi finner fouriertransformen til resultatet

$$\text{(i) } \underline{\underline{\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}[f(t+1) + f(t-1)] = \frac{1}{2} e^{-i\omega} \hat{f}(\omega) + \frac{1}{2} e^{i\omega} \hat{f}(\omega) = \cos \omega \hat{f}(\omega)}}. \text{ Dermed blir}$$

$$\underline{\underline{\hat{h}_i(\omega) = \cos \omega}},$$

$$\text{(ii) } \underline{\underline{\hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F}(e^{-|t|} * f), \text{ dvs., } \hat{g}(\omega) = \frac{1}{2} \frac{2}{1+\omega^2} \hat{f}(\omega), \text{ og } \hat{h}_ii(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}}}.$$

- c) Vi har

$$\begin{aligned} E(g) &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{h}(\omega)|^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = E(f), \end{aligned}$$

siden $|\hat{h}(\omega)| \leq 1$ for både \hat{h}_i og \hat{h}_{ii} .

Oppgave 4

a) Vi skriver dividert differensetabeller på formen

x_0	$f(x_0)$	$[x_1x_0]$	$[x_2x_1x_0]$	$[x_3x_2x_1x_0]$
x_1	$f(x_1)$	$[x_2x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$[x_3x_2]$	$[x_3x_2x_1]$	
x_3	$f(x_3)$			

Dette gir tabellen

0	1			
1	-1	-2		
4	1	2/3	2/3	
6	-1	-1/3	-1/6	

for datasett i), og tabellen

4	1			
1	-1	2/3		
6	-1	0	-1/3	
0	1	-1/3	1/3	-1/6

for datasett ii).

b) Interpolasjonspolynomiet kan skrives på formen

$$p = f(x_0) + [x_1x_0](x - x_0) + [x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1) + [x_3x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Ved bruk av tabellene i (a) finner vi dermed

$$p_1(x) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-4) = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

og

$$p_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-4) - \frac{1}{3}(x-4)(x-1) - \frac{1}{6}(x-4)(x-1)(x-6) = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3.$$

Vi ser at $p_1(x) = p_2(x)$. Dette er ellers opplagt siden begge tredjegradspolynomene går gjennom de samme 4 punktene.

Oppgave 5

a) Vi deler intervallet $[0, 1]$ i $N = 1/h$ deler med lengde h og betrakter den ukjente funksjonen i de diskrete punktene $x_m = mh$, $m = 0, \dots, N$. Det samme gjør vi med tidspunktene $t_n = nh$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Følgelig Euler for problemet i oppgaven blir da

$$(1) \quad \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \quad 1 \leq m \leq (N-1), \quad n \geq 0;$$

$$(2) \quad u_0^n = u_N^n = 0, \quad n \geq 1.$$

b) Ved å bruke algoritmen i (a) får vi likningene som gir oss $x = u_6^1$, $y = u_6^2$ og $z = u_6^3$. Siden

$$u_5^0 = \cos(\pi(x_5 - 1/2)) = 1, \\ u_6^0 - u_6^0 = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_6^0 - 2u_6^0 + u_6^0}{h^2},$$

får vi med

$$u_7^0 = \cos(\pi(x_7 - 1/2)) = 0.8090, \\ u_6^0 = \cos(\pi(x_6 - 1/2)) = 0.9511,$$

at $x = u_6^0 = 0.9133$ (Den numeriske løsningen må være symmetrisk om $x = 0.5$ siden problemet er det. Det betyr at vi uten videre kunne sagt $u_6^0 = u_4^0$). Videre får vi

$$\frac{u_5^2 - u_5^1}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_6^1 - 2u_5^1 + u_4^1}{h^2}$$

som gir $y = u_5^2 = 0.9222$. Likningen

$$\frac{u_5^3 - u_5^2}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{u_6^2 - 2u_5^2 + u_4^2}{h^2}$$

gir oss $z = u_5^3 = 0.8856$.

(NB: Tabellen i oppgaven er feil for elementet u_7^1 . Dette er uten betydning for svaret).