Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4130 MATEMATIKK 4N, AUG. 2004

Oppgave 1

a)

$$\frac{2s}{(s^2+1)^2}, \qquad \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}, \qquad \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$$

b)

$$x(t) = C(\sin t - t\cos t)$$

Oppgave 2

MANGLER!

Oppgave 3

MANGLER

Oppgave 4

a) Vi får tabellen

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
0	1			
		-2		
1	-1		$2/3$	
		$2/3$		$-1/6$
4	1		$-1/3$	
		-1		
6	-1			

for datasett i), og for datasett ii) får vi tabellen

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	
4	1			
		$2/3$		
1	-1		$-1/3$	
		0		$-1/6$
6	-1		$1/3$	
		$-1/3$		
0	1			

b) Interpolasjonspolynomet kan skrives på formen

$$p = f(x_0) + f[x_1x_0](x-x_0) + f[x_2x_1x_0](x-x_0)(x-x_1) + \\ + f[x_3x_2x_1x_0](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2).$$

Ved bruk av tabellene fra **a)** finner vi

$$p_1(x) = 1 - 2x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{6}x(x-1)(x-4) = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

og

$$p_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-4) - \frac{1}{3}(x-4)(x-1) - \frac{1}{6}(x-4)(x-1)(x-6) = 1 - \frac{10}{3}x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

Vi ser at $p_1(x) = p_2(x)$. Dette er ellers opplagt siden begge tredjegradspolynomene går gjennom de samme 4 punktene.

Oppgave 5

a) Vi deler intervallet $[0,1]$ i $N = 1/h$ deler med lengde h og betrakter den ukjente funksjonen i de diskrete punktene $x_m = mh$, $m = 0, \ldots, N$. Det samme gjør vi med tidspunktene $t_n = nk$, $n = 0, 1, 3, \ldots$. Forlengs Euler for problemet i oppgaven blir da

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + 2u_{i-1}^j}{h^2}, \qquad 1 \le i \le (N-1), \quad j \ge 0;$$
$$u_0^j = u_N^j = 0, \qquad j \ge 1.$$

b) Ved å bruke algoritmen i **a)** får vi ligningene som gir oss $x = u_6^1$, $y = u_5^2$ og $z = u_5^3$. Siden

$$u_5^0 = \cos(\pi(x_5 - 1/2)) = 1,$$
$$\frac{u_6^1 - u_6^0}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_7^0 - 2u_6^0 + u_5^0}{h^2}$$

får vi med

$$u_7^0 = \cos(\pi(x_7 - 1/2)) = 0.8090,$$
$$u_6^0 = \cos(\pi(x_6 - 1/2)) = 0.9511,$$

at $x = u_6^1 = 0.9133$ (den numeriske løsningen må være symmetrisk om $x = 0.5$ siden problemet er det. Det betyr at vi uten videre kunne sagt $u_6^1 = u_4^1$). Videre får vi

$$\frac{u_5^2 - u_5^1}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_6^1 - 2u_5^1 + u_4^1}{h^2}$$

som gir $y = u_5^2 = 0.9222$. Likningen

$$\frac{u_5^3 - u_5^2}{k} = \frac{1}{\pi^2}\frac{u_6^2 - 2u_5^2 + u_4^2}{h^2}$$

gir oss $z = u_5^3 = 0.8856$.

Oppgave 6 Gauss–Seidel-metoden blir

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{2} \\ y_{n+1} &= \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}z_n + \frac{3}{4} \\ z_{n+1} &= \frac{1}{4}y_{n+1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La $x_0 = \frac{3}{4}$, $y_0 = 1$, $z_0 = \frac{3}{4}$. Dette gir

$$x_1 = \frac{3}{4}, \quad y_1 = \frac{9}{8}, \quad z_1 = \frac{25}{32}$$