Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

# TMA4130 Matematikk 4N
Mandag 15.12.2008

**Løsningsforslag**

$\boxed{1}$ **a)** i)

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3},$$
$$\mathcal{L}(t^2 e^{2t}) = \frac{2}{(s-2)^3}. \quad \text{(1. Skifteteorem)}$$

ii)

$$\mathcal{L}(t - tu(t-1)) = \mathcal{L}(t - (t-1)u(t-1) - u(t-1)) =$$
$$\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s^2} - e^{-s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right). \quad \text{(2. Skifteteorem)}$$

iii)

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\, d\tau\right) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2. \quad \text{(Konvolusjonsteoremet)}$$

**b)** i)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^2 e^{-2s}\right) = (t-2)u(t-2).$$

ii)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-s}\frac{1}{s}\right) = u(t-1),$$
$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s}\left(1 - e^{-s}\right) = 1 - u(t-1).$$

iii)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty \frac{d\tau}{\tau^2+1}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

**c)** Vi transformerer og får

$$s^2 Y + sY + Y = e^{-s}\frac{1}{s},$$
$$Y = e^{-s}\frac{1}{s(s^2+s+1)}.$$

Som delbrøk blir $Y$ av formen

$$Y = e^{-s}\left(\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}\right).$$

Litt regning gir

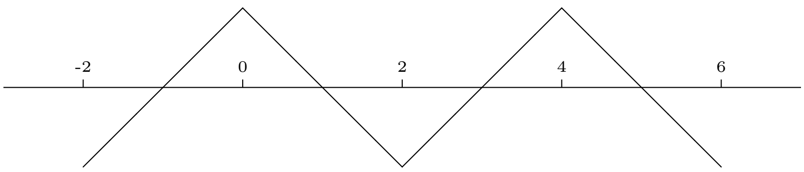
$$\begin{aligned} Y &= e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right) \\ &= e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right). \end{aligned}$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right) = 1 - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

2. Skifteteorem gir

$$y(t) = u(t-1)\left(1 - e^{-\frac{t-1}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)\right).$$




$\boxed{2}$ **a)**

Cosinusrekka til $f$ blir av formen

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\frac{\pi}{2}x.$$

Vi har $a_0 = 0$, og $a_n = \int_0^2 f(x)\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx$. En gangs delvisintegrasjon viser at

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad n \text{ like}, \\ \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{n^2} & \text{for} \quad n \text{ odde}. \end{cases}$$

**b) b)** Et standard argument, viser at løsningen kan skrives som

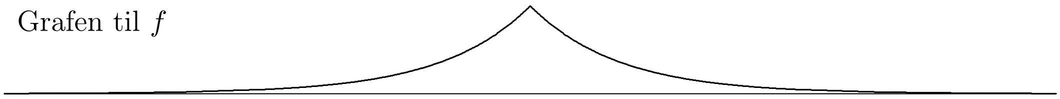
$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t}\cos n\frac{\pi}{2}x.$$

Vi får oppfylt initialbetingelsen ved å velge $A_n = a_n$ som i punkt **a)**. Altså er

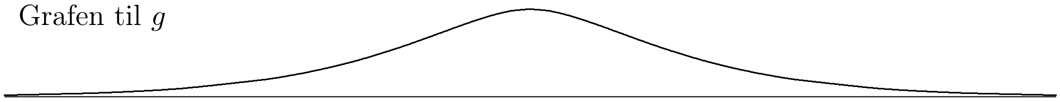
$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-((2k+1)\frac{\pi}{2})^2 t}\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}x.$$

$\boxed{3}$ **a)**

Grafen til $f$



Grafen til $g$



Fourierinverson gir oss $f$ og $g$ tilbake

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} e^{ixw}\, dw,$$
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+w^2)^2} e^{ixw}\, dw.$$

Siden $f$ og $g$, og derfor også $\hat{f}$ og $\hat{g}$ er likefunksjoner forsvinner sinusdelen og vi har

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} \cos xw\, dw,$$
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+w^2)^2} \cos xw\, dw.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{(1+w^2)^2}\, dw = 0, \quad \text{fordi integranden er odde.}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+w^2)^2}\, dw = \frac{2\pi}{4} g(0) = \frac{\pi}{2}.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 w}{(1+w^2)^2}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2w}{(1+w^2)^2}\, dw = \frac{2\pi}{8}(g(0)+g(2)) = \frac{\pi}{4}(1+3e^{-2}).$$

**b)**

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|} e^{-|x-v|}\, dv = (f*f)(x).$ Tar vi Fouriertransformen ser vi at

$\mathcal{F}(f*f)(w) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+w^2}\right)^2 = \hat{g}(w),$ og følgelig er $(f*f)(x) = g(x)$.

$\boxed{4}$ **a)** Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 27(x+y),$$

på firkanten $[0,1]\times[0,1]$ med randbetingelser

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 3x, \quad u(1,y) = 3y.$$

Approksimasjon av ligningen i noden $(x_i, y_j)$ ved hjelp av sentraldifferanser, gir

$$U_{i+1}^j + U_i^{j+1} + U_{i-1}^j + U_i^{j-1} - 4U_i^j = h^2 f(x_i, y_j),$$

hvor $U_i^j \approx u(x_i, y_j)$, $\quad f(x,y) = 27(x+y) \quad$ og $\quad x_i = ih,\ y_j = jh,\ h = 1/3$.
Approksimasjon av ligningen i $(x_i, y_j)$, hvor $i, j \in \{1, 2\}$, gir ligningene

$$\begin{array}{rclcl}
-4U_1^1 + U_1^2 + U_2^1 + 0 + 0 & = & \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) & \text{i} & (x_1, y_1), \\
-4U_2^1 + U_1^1 + U_2^2 + 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} & = & \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) & \text{i} & (x_2, y_1), \\
-4U_1^2 + U_1^1 + U_2^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} + 0 & = & \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{i} & (x_1, y_2), \\
-4U_2^2 + U_1^2 + U_2^1 + 3 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{2}{3} & = & \left(\frac{1}{3}\right)^2 27 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) & \text{i} & (x_2, y_2).
\end{array}$$

Dette kan skrives på matriseform

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

**b)** En iterasjon med Gauss-Seidel

$$x_j^{(1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left( b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(1)} - \sum_{k=j+1}^{4} a_{jk} x_k^{(0)} \right), \quad j = 1, \ldots, 4,$$

anvendt på ligningssystemet (1) i a) med startvektoren $\boldsymbol{U}^{(0)} = -[1,1,1,1]^T$, gir

$$\begin{array}{rclcl}
(U_1^1)^{(1)} & = & \frac{1}{-4}(2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) & = & -1, \\
(U_2^1)^{(1)} & = & \frac{1}{-4}(2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) & = & -1, \\
(U_1^2)^{(1)} & = & \frac{1}{-4}(2 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) & = & -1, \\
(U_2^2)^{(1)} & = & \frac{1}{-4}(0 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) & = & -0.5.
\end{array}$$

En iterasjon med Gauss-Seidel på systemet

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

med startvektoren $\boldsymbol{x}^{(0)} = -[1,1,1,1]^T$, gir

$$\begin{array}{rclcl}
x_1^{(1)} & = & \frac{1}{-5}(2.5 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) & = & -1.1, \\
x_2^{(1)} & = & \frac{1}{-5}(2 - 1 \cdot (-1.1) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1)) & = & -1.02, \\
x_3^{(1)} & = & \frac{1}{-5}(2 - 1 \cdot (-1.1) - 1 \cdot (-1.02) - 1 \cdot (-1)) & = & -1.024, \\
x_4^{(1)} & = & \frac{1}{-5}(-0.5 - 1 \cdot (-1.1) - 1 \cdot (-1.02) - 1 \cdot (-1.024)) & = & -0.5288.
\end{array}$$

De eksakte løsningene av ligningssytemene er like.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{5}$ **a)** For de tre foreslåtte fikspunktiterasjonene(på formen $x_{n+1} = g(x_n)$) sjekker vi $g'(x)$.

- For nummer 1) er $g'(x) = 3x^2$. Siden $g'(1) > 1$ og $g'(x)$ er monotont økende er $g'(x) > 1$ for $x \in I$, og vi vet da at iterasjonen ikke vil konvergere til en løsning i $I$, uansett startverdi $x_0 \in I$.
- For nummer 2) er $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ og $g'(1.5) < -1$. $g'(x)$ er monotont økende, og $|g'(x)| > 1$ for $x \in I$
- For nummer 3) er $g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$. Siden $g'(1) < 1$, $g'(1.5) < 1$, og $g'(x)$ er monotont minkende, vil $|g'(x)| < 1$ for $x \in I$, og iterasjonen konvergerer for alle $x_0 \in I$. Dette er den vi bør bruke.

Utfører vi iterasjonen får vi $x_0 = 1,\ x_1 = 1.2599,\ x_2 = 1.3122,\ x_3 = 1.3223,\ x_4 = 1.3242$. Videre vil de tre første sifrene forbli uforandret, og vi kan konkludere at $s = 1.32\ldots$.

**b)** Bruker vi metoden med Newtons dividerte differanser, får vi skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 & \\ 2 & 5 & & \end{array}$$

Polynomet blir $-1+0\cdot(x-0)+3\cdot(x-0)(x-1) = 3x^2-3x-1$, med nullpunkter $1.26376$ og $-0.26376$. Vi må velge det nullpunktet som ligger inne i intervallet, altså blir vår approksimasjon $s^* = 1.26376$.
NB: Om interpolasjonspunktene hadde ligget tettere ville vi selvsagt fått et mer nøyaktig resultat. Denne metoden er faktisk en av komponentene i matlabs *fminsearch*.