TMA4130 - Kommentar til interpolasjonsoppgave

Morten Dahlby

October 20, 2009

Vi ønsker å finne polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som løser interpolasjonsproblemet

x_n	-2	-1	0	1	2
$p(x_n)$	3	1	1	3	7

En mulig løsning er å bruke formelen for interpolasjonspolynom på Lagrangeform. Vi får da

$$\begin{aligned}
p_4(x) = 3 \cdot & \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2+0)(-2-1)(-2-2)} \\
+ 1 \cdot & \frac{(x+2)(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1+0)(-1-1)(-1-2)} \\
+ 1 \cdot & \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+2)(0+1)(0-1)(0-2)} \\
+ 3 \cdot & \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-0)(1-2)} \\
+ 7 \cdot & \frac{(x+2)(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-0)(2-1)} \\
= & \, x^2 + x + 1.
\end{aligned}$$

Merk at selv om vi bruker alle fem interpolasjonspunktene (og derfor forventer å få et polynom av orden 4), så får vi et polynom orden 2. Man kan spørre seg om det finnes et annet polynom $q(x)$ som interpolerer dette datasettet. Det må i så fall tilfredstille $p(x) - q(x) = 0$ for $x = x_k$, $k = 1, \ldots, 5$. Med andre ord er $p(x) - q(x)$ et polynom som er null fem ganger. Dette er mulig på to måter, enten er $q(x)$ et polynom av grad 5 eller mer (siden $p(x)$ er av grad 2), eller så er $p(x) = q(x)$. Siden oppgaven spør om polynomet av lavest mulig grad, ser vi da at polynomet av grad 2 oppfyller dette kravet (og dette er dermed unikt).

Det finnes andre polynom som interpolerer datasettet, for eksempel

$$\begin{aligned}
p_5(x) &= p_4(x) + (x+2)(x+1)(x-0)(x-1)(x-2) \\
&= x^5 - 5x^3 + x^2 + 5x + 1,
\end{aligned}$$

men disse vil alltid ha grad større enn 5 (og er derfor ikke riktig svar på oppgaven).

Altså vil man alltid finne *polynomet av lavest mulig grad* ved å bruke Lagrangeinterpolasjon som ovenfor. Det er ikke nødvendig å prøve seg fram med færre interpolasjonspunkter for å muligens finne et polynom av lavere grad, selv om det i noen tilfeller kan forenkle utregningene. For eksempel kunne man løst oppgaven ved å interpolere de tre første punktene:

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= 3 \cdot \frac{(x+1)(x-0)}{(-2+1)(-2+0)} \\
&\quad + 1 \cdot \frac{(x+2)(x-0)}{(-1+2)(-1+0)} \\
&\quad + 1 \cdot \frac{(x+2)(x+1)}{(0+2)(0+1)} \\
&= x^2 + x + 1.
\end{aligned}
$$

Man må så sjekke at $p_2(x) = p(x_k)$ for $k = 3$ og $k = 4$, noe som i dette tilfellet er oppfyllt. Det er ganske mye lettere å beregne $p(x)$ på denne måten, men husk at hvis man på forhånd ikke vet hvilken orden polynomet har, kan man risikere å beregne $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ og $p_4(x)$ (noe som på ingen måte er tidsbesparende).