

Faglig kontakt under eksamen:  
Eldar Straume tlf. 73 59 66 83



## EKSAMEN I TMA4130 MATEMATIKK 4N

Bokmål

Mandag 15. desember 2008

kl. 09–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S, Citizen SR270X)  
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 12. januar 2009.

*Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.*

### Oppgave 1

a) Finn Laplacetransformene til funksjonene

i)  $t^2 e^{2t}$ ,

ii)  $t - tu(t - 1)$ ,

iii)  $\int_0^t \sin \tau \sin(t - \tau) d\tau$ .

b) Finn de inverse Laplacetransformene til funksjonene

i)  $\frac{1}{s^2} e^{-2s}$ ,

ii)  $\frac{1}{s}(1 - e^{-s})$ ,

iii)  $\int_s^\infty \frac{d\tau}{\tau^2 + 1}$ .

c) Løs initialverdiproblemet

$$y'' + y' + y = u(t - 1),$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

**Oppgave 2** Funksjonen  $f$  er definert ved at følgende betingelser er oppfylt.

- i)  $f(x) = f(-x)$  for alle reelle  $x$ .
  - ii)  $f(x) = f(x + 4)$  for alle reelle  $x$ .
  - iii)  $f(x) = 1 - x$  for  $0 < x < 2$ .
- a) Skisser grafen til  $f$  for  $-2 < x < 6$ , og finn Fourier-cosinusrekka til  $f$ .
- b) Løs varmeligningen  $u_t = u_{xx}$  i området  $0 < x < 2$  og  $t > 0$  med randverdiene  $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$  og initialbetingelsen  $u(x, 0) = 1 - x$  for  $0 < x < 2$ .

**Oppgave 3** Funksjonene  $f$  og  $g$  er definert ved

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{for } x > 0, \\ e^x & \text{for } x < 0, \end{cases} \quad \text{og} \quad g(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & \text{for } x > 0, \\ (-x+1)e^x & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

Det oppgis at Fouriertransformene er

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{1+w^2} \quad \text{og} \quad \hat{g}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{4}{(1+w^2)^2}.$$

- a) Tegn skisse av grafene til  $f$  og  $g$ , og bruk Fourier-inversjon til å finne verdiene av

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{(1+w^2)^2} dw, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+w^2)^2} dw \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 w}{(1+w^2)^2} dw.$$

Hint:  $\cos 2w = 2\cos^2 w - 1$ .

- b) Finn et eksplisitt uttrykk for konvolusjonsintegralet

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|} e^{-|x-v|} dv = (f * f)(x).$$

**Oppgave 4**

- a) Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 27(x + y),$$

på firkanten  $[0, 1] \times [0, 1]$  med randbetingelser

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 3x, \quad u(1, y) = 3y.$$

Finn en tilnærming til løsningen  $u(x, y)$  ved å bruke sentraldifferanser for å approksimere  $u_{xx}$  og  $u_{yy}$ . La  $h = 1/3$  være skrittlengden, og la gitteret være gitt av punktene  $(x_i, y_j) = (ih, jh)$  for  $i, j = 0, \dots, 3$ . Sett opp et system av ligninger for  $U_1^1, U_2^1, U_1^2, U_2^2$ , der  $U_i^j \approx u(x_i, y_j)$

- b) Utfør én Gauss-Seidel-iterasjon på systemet du fikk i oppgave a). Hvis du ikke fikk til oppgave a), bruk systemet

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}.$$

Bruk startvektoren  $\mathbf{x}^{(0)} = -[1, 1, 1, 1]^T$  i begge tilfellene.

**Oppgave 5** Tredjegradspolynomet

$$p(x) = x^3 - x - 1,$$

har en rot  $s$  som ligger i intervallet  $I = [1, 1.5]$ .

- a) Gitt følgende tre fikspunktiterasjoner,

$$\begin{aligned} 1) \quad x_{n+1} &= x_n^3 - 1 \\ 2) \quad x_{n+1} &= \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n^2} \\ 3) \quad x_{n+1} &= \sqrt[3]{x_n + 1}. \end{aligned}$$

Hvilken av disse ville du valgt for å finne  $s$ ? Begrunn svaret. Bruk iterasjonen med startverdi  $x_0 = 1$  og regn ut  $s$  med tre korrekte siffer.

- b) En alternativ måte å approksimere
- $s$
- på er å først approksimere
- $p(x)$
- med et andregradspolynom, for så å finne nullpunkt til dette med andregradsformelen. Finn denne approksimasjonen til
- $s$
- når andregradspolynomet konstrueres ved å interpolere
- $p(x)$
- i
- $x = 0$
- ,
- $x = 1$
- og
- $x = 2$
- .