



## EKSAMEN I MATEMATIKK 4N/D (TMA4130/5)

13. desember 2006

### LØSNINGSFORSLAG

#### Oppgave 1

a) Vi har

$$\frac{1}{s(s^2 + s - 2)} = \frac{1}{s(s-1)(s+2)}$$

og, etter delbrøksoppspaltning, får vi

$$\frac{1}{s(s^2 + s - 2)} = -\frac{1}{2s} + \frac{1}{3(s-1)} + \frac{1}{6(s+2)}.$$

Derfor, fra Laplacetabellen,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + s - 2)}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t}.$$

Vi bruker  $s$ -forskyvningsreglen og får:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2 + s - 2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + s - 2)}\right)(t-1)u(t-1) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t-1} + \frac{1}{6}e^{-2(t-1)}\right)u(t-1)\end{aligned}$$

Vi bruker  $s$ -forskyvningsreglen en gang til:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s(s^2 + s - 2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + s - 2)}\right)(t-2)u(t-2) \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t-2} + \frac{1}{6}e^{-2(t-2)}\right)u(t-2)\end{aligned}$$

b) Fra grafen ser vi at

$$r(t) = u(t) + u(t-1) - 2u(t-2)$$

Vi anvender Laplacetransformen til den ordinære differentialle ligningen og får

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + sY - y(0) - 2Y = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s}$$

som gir

$$Y = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s(s^2+s-2)} + \frac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)} - 2\frac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}$$

Vi bruker punktet a) og får

$$\begin{aligned} y = & -\frac{1}{2} + \frac{4}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{-2t} \\ & + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^{t-1} + \frac{1}{6}e^{-2(t-1)}\right) u(t-1) \\ & + \left(1 - \frac{2}{3}e^{t-2} - \frac{1}{3}e^{-2(t-2)}\right) u(t-2). \end{aligned}$$

**Oppgave 2** Vi bruker formelen (Rottman s.176):

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

og får

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h) &= \mathcal{F}(e^{-x^2} * e^{-x^2}) \\ &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}(e^{-x^2})\mathcal{F}(e^{-x^2}) \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{w^2}{4}}\right)^2. \end{aligned}$$

Derfor,

$$\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{w^2}{2}}.$$

For  $a = \frac{1}{2}$ , formelen som er gitt i oppgaveteksten gir  $\mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^2}) = e^{-\frac{w^2}{2}}$ . Derfor,

$$h = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(h) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathcal{F}^{-1}(e^{-\frac{w^2}{2}})$$

og

$$h = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**Oppgave 3**

a) Ved innsetting ser vi at:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_1 \pm u_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_1 \pm u_2) = \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) \pm \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = 0,$$

og

$$\begin{aligned} (u_1 + u_2)(0, t) &= 2a, & (u_1 - u_2)(0, t) &= 0, \\ (u_1 + u_2)(1, t) &= 2b, & (u_1 - u_2)(1, t) &= 0. \end{aligned}$$

Superposisjonsprinsippet holder for (\*) dersom  $Au_1(x, t) + Bu_2(x, t)$  også løser (\*) for alle reelle tall  $A$  og  $B$ :

$$\frac{\partial}{\partial t}(Au_1 + Bu_2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Au_1 + Bu_2) = A \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + B \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) = 0,$$

og

$$(Au_1 + Bu_2)(0, t) = (A + B)a \quad \text{og} \quad (Au_1 + Bu_2)(1, t) = (A + B)b,$$

dvs.  $Au_1(x, t) + Bu_2(x, t)$  løser (\*) bare når  $a = 0 = b$ . Dermed holder superposisjonsprinsippet ikke for (\*) når  $a$  eller  $b$  er ulik null. Men det holder for (\*\*) siden (\*\*) svarer til (\*) med  $a = 0 = b$ .

b) Legg merke til at  $v_t = u_t$ ,  $v_{xx} = u_{xx}$ ,  $v(0, t) = u(0, t) - a$  og  $v(1, t) = u(1, t) - b$ . Siden  $u$  oppfyller (\*), ser vi at  $v$  må oppfylle (\*\*).

Randverdiproblemet (\*\*) er løst i Kreyszig, se der for detaljer i utregningen. Innsetting av  $v(x, y) = F(x)G(t)$  i (\*\*) gir

$$\begin{aligned} G'(t) &= kG(t) \quad \text{for } t > 0, \\ F''(x) &= kF(x) \quad \text{for } 0 < x < 1, \\ F(0) &= 0 = F(1), \end{aligned}$$

der  $k$  er en konstant. Likningene for  $F$  har bare løsning forskjellig fra 0 når  $k = -n^2\pi^2$  for  $n \in \mathbb{N}$ , og da er

$$F_n(x) = K_n \sin(n\pi x) \quad \text{og} \quad G_n(t) = \bar{K}_n e^{-n^2\pi^2 t},$$

for vilkårlige konstanter  $K_n, \bar{K}_n$ . Alle løsninger på formen  $v(x, y) = F(x)G(t)$  er da gitt ved

$$v_n(x, t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{A_n e^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

og der  $A_n = K_n \bar{K}_n$  er en vilkårlig konstant.

- c) Husk at  $a = -1$  og  $b = 1$ , slik at  $u(x, t) = v(x, t) - [-1 + 2x]$ . Vi ser da at  $v$  løser randverdiproblemet (\*\*) med initialbetingelse

$$v(x, 0) = u(x, 0) + [-1 + 2x] = \sin(\pi x) + [-1 + 2x]. \quad (1)$$

Fra b) og superposisjon har vi følgende kandidat til løsning av (\*\*) og (1),

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 \pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Ved å sette  $t = 0$  får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = v(x, 0) = \sin \pi x + [-1 + 2x]. \quad (2)$$

Nå finner vi Fourier sin-rekken til  $-1 + 2x$  for  $0 \leq x \leq 1$ :

$$-1 + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) \quad \text{for } 0 < x < 1 \quad \text{og} \quad b_n = 2 \int_0^1 (-1 + 2x) \sin(n\pi x) dx.$$

Delvis integrasjon gir at  $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 + (-1)^n)$  for  $n \in \mathbb{N}$ , og fra (2) ser vi dermed at må vi velge

$$A_1 = b_1 + 1 \quad \text{og} \quad A_n = b_n \quad \text{for } n > 1.$$

Dvs. løsningen  $v$  av (\*\*) og (1) er

$$v(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x + \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} e^{-4m^2 \pi^2 t} \sin(2m\pi x).$$

Her har vi brukt at  $b_n = 0$  for  $n$  odde og  $b_n = \frac{4}{n\pi}$  for  $n (= 2m)$  like. Løsningen  $u$  av (\*) og (\*\*\*) er da

$$u(x, t) = v(x, t) - [-1 - 2x].$$

## Oppgave 4

- a) Newtons dividerte differans Interpolasjon formel

$x_j$	$f_j$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, \dots, x_{j+3}]$	$f[x_j, \dots, x_{j+4}]$	
-2	12					
-1	0	-12	6			
0	0	0	3	-1	0	(1)
1	6	6	0	-1		
2	12	6				

Interpolasjonen er

$$p(t) = 12 - 12(x+2) + 6(x+2)(x+1) - 1(x+2)(x+1)x = -x^3 + 3x^2 + 4x \quad (2)$$

b) Integrasjon med Simpson

$$\frac{1}{3}(12 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 12) = 16 \quad (3)$$

Analytisk integrasjon. 1. og 3. ledd er odde:

$$\int_{-2}^2 -x^3 + 3x^2 + 4x \, dx = [x^3]_{-2}^2 = 16 \quad (4)$$

Simpson's formel for integrasjon ga eksakt resultat.

Feilen til Simpson er gitt ved

$$\frac{h}{12} p^{(4)}(\xi) \quad (5)$$

der  $\xi$  er et element i integrasjonsintervallet. Derivasjon av  $p(t)$  gir  $p^{(4)}(t) \equiv 0$ . Derfor var det forventet at Simpson skulle gi nøyaktig svar.

## Oppgave 5

a) Vi tilnærmer den andre deriverte med hensyn på  $x$  i punktet  $P_{i,j} = (ih, jh)$  ved

$$u_{xx}(P_{i,j}) = \frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2}.$$

På den samme måten har vi

$$u_{yy}(P_{i,j}) = \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2}.$$

Ligningen  $u_{xx} + 2u_{yy} = 0$  medfører derfor

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{h^2} + 2 \frac{U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 2U_{i,j}}{h^2} = 0$$

og

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

b) I punktet  $P_{1,1}$ , har vi

$$-6U_{1,1} + U_{2,1} + U_{0,1} + 2U_{1,2} + 2U_{1,0} = 0$$

og, siden  $U_{0,1} = U_{1,0} = 0$ ,

$$-6U_{1,1} + U_{2,1} + 2U_{1,2} = 0. \quad (6)$$

I punktet  $P_{2,1}$ , har vi

$$U_{3,1} + U_{1,1} + 2U_{2,2} + 2U_{2,0} - 6U_{2,1} = 0$$

og, siden  $U_{3,1} = 1$ ,  $U_{2,0} = 0$ ,

$$U_{1,1} - 6U_{2,1} + 2U_{2,2} = -1. \quad (7)$$

I punktet  $P_{1,2}$ , har vi

$$U_{2,2} + U_{0,2} + 2U_{1,3} + 2U_{1,1} - 6U_{1,2} = 0$$

og, siden  $U_{0,2} = 0$  og  $U_{1,3} = 1$ ,

$$2U_{1,1} - 6U_{1,2} + U_{2,2} = -2. \quad (8)$$

I punktet  $P_{2,2}$ , har vi

$$U_{3,2} + U_{1,2} + 2U_{2,3} + 2U_{2,1} - 6U_{2,2} = 0$$

og, siden  $U_{3,2} = U_{2,3} = 1$ ,

$$2U_{2,1} + U_{1,2} - 6U_{2,2} = -3 \quad (9)$$

Vi samler ligningene (6), (7), (8) og (9), og vi får den følgende systemet:

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Den første steg av Gauss-Seidels iterasjon er gitt ved

$$\begin{cases} -6U_{1,1}^1 + U_{2,1}^0 + 2U_{1,2}^0 = 0 \\ U_{1,1}^1 - 6U_{2,1}^1 + 2U_{2,2}^0 = -1 \\ 2U_{1,1}^1 - 6U_{1,2}^1 + U_{2,2}^0 = -2 \\ 2U_{2,1}^1 + U_{1,2}^1 - 6U_{2,2}^1 = -3 \end{cases}$$

Vi får

$$U_{1,1}^1 = \frac{1}{4},$$

og

$$U_{2,1}^1 = -\frac{1}{6}\left(-1 - 1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8},$$

og

$$U_{1,2}^1 = -\frac{1}{6}\left(-2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

og

$$U_{2,2}^1 = -\frac{1}{6}\left(-3 - \frac{1}{2} - \frac{6}{8}\right) = \frac{17}{24}$$

Derfor,

$$(U_{1,1}^1, U_{2,1}^1, U_{1,2}^1, U_{2,2}^1) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{17}{24}\right).$$