Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

EKSAMEN I MATEMATIKK 4N (TMA4125)

21. mai 2008

LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Vi har

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Vi bruker delbrøksoppspaltning og får

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

slik at den inverse Laplacetransformen til F er

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(t) = f(t) = e^{-t} - e^{-2t}. \tag{L-1}$$

Vi har

$$G(s) = \frac{s-2}{s(s+1)(s+2)}.$$

Igjen bruker vi delbrøskoppspaltning og får

$$G(s) = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}.$$

Dermed

$$\mathcal{L}^{-1}(G)(t) = g(t) = -1 + 3e^{-t} - 2e^{-2t}. \tag{L-2}$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}(X) = -3\mathcal{L}^{-1}(e^{-s}F(s))$$

og t-forskyvningsteoremet gir

$$\mathcal{L}^{-1}(X)(t) = -3f(t-1)u(t-1)$$

og

$$\mathcal{L}^{-1}(X)(t) = x(t) = -3(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})u(t-1) \tag{L-3}$$

fra (L-1). Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}(e^{-s}G(s))$$

og t-forskyvningsteoremet gir

$$\mathcal{L}^{-1}(Y)(t) = g(t-1)u(t-1).$$

Derfor,

$$\mathcal{L}^{-1}(Y)(t) = y(t) = (-1 + 3e^{-(t-1)} - 2e^{-2(t-1)})u(t-1) \tag{L-4}$$

fra (L-2).

b) Vi anvender Laplacetransformen på begge sider av de to ligninger. Siden $\mathcal{L}(u(t-1)) = \frac{e^{-s}}{s}$ og $x(0) = y(0)$, får vi

$$\begin{aligned} sX &= -4X - 3Y - 3\frac{e^{-s}}{s}, \\ sY &= 2X + Y + \frac{e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

som kan skrives om

$$\begin{aligned} (s+4)X + 3Y &= -3\frac{e^{-s}}{s}, \\ -2X + (s-1)Y &= \frac{e^{-s}}{s}. \end{aligned}$$

Vi løser dette systemet og får

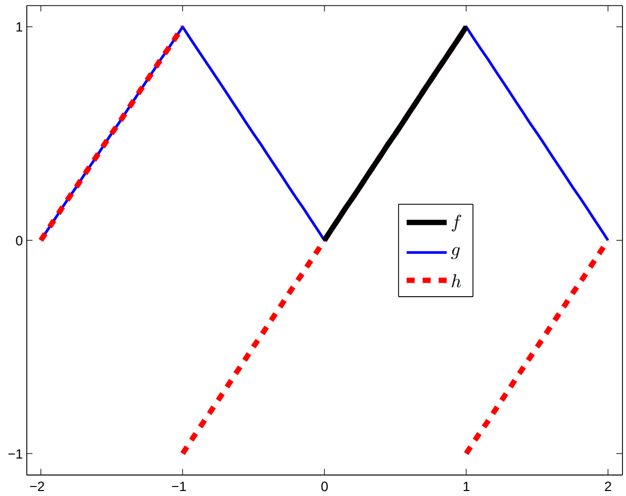
$$\begin{aligned} X &= -\frac{3e^{-s}}{s^2+3s+2}, \\ Y &= \frac{(s-2)e^{-s}}{s(s^2+3s+2)}. \end{aligned}$$

I punktet **a)** har vi regnet ut inverse Laplacetransformene til X og Y. Man har

$$\begin{aligned} x(t) &= -3(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})u(t-1), \\ y(t) &= (-1 + 3e^{-(t-1)} - 2e^{-2(t-1)})u(t-1). \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Vi har



Grafene til f, g og h.

Sinus-rekken til f er gitt av

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

der

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx$$

Vi bruker delvis integrasjon og får

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx \\
&= 2\left[x\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\,dx \\
&= -2\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} + 2\left[\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1 \\
&= 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Cosinusrekken til f er Fourierrekken til den like periodiske utvidelsen av f, det vil si g. Siden g er kontinuerlig i $x = 1$ får vi at summen til cosinusrekken til f er lik $g(1) = 1$. Sinurekken til f er Fourierrekken til den odde periodiske utvidelsen av f, det vil si h. Nå er h ikke kontinuerlig i $x = 1$ og vi har at summen til sinusrekken til f er lik $\frac{h(1-)+h(1+)}{2} = 0$.

b) Cosinusrekken til f er gitt av

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

der

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,dx,\ \ a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx.$$

Vi får

$$a_0 \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

og, ved hjelp av delvis integrasjon,

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \\ &= 2\left[x\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}\,dx \\ &= 2\left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2}\right]_0^1 \qquad \text{siden } \sin(n\pi) = \sin(0) = 0 \\ &= 2\frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} \qquad \text{siden } \cos(n\pi) = (-1)^n. \end{aligned}$$

Vi tar $x = 0$. I dette punktet er summen til cosinusrekken lik $g(0) = 0$ fordi g er kontinuerlig. Vi får

$$\frac{1}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{(n\pi)^2} = 0 \tag{L-5}$$

Vi har

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ er like} \\ -2 & \text{hvis } n \text{ er odde.} \end{cases}$$

Vi kan skrive om summen i (L-5) ved å bare ta de odde n og vi får

$$\frac{1}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{((2n+1)\pi)^2} = 0.$$

Det følger at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Oppgave 3

a) Vi setter inn $u(x,t) = F(x)G(t)$ i ligningen og får

$$G''F = F''G.$$

Det følger at

$$\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} = k$$

der k er en konstant som er uavhengig av t og x.

Vi vil løse

$$F'' = kF \tag{L-6}$$

og vi må finne randbetingelsene for (L-6). Siden $u_x(0,t) = 0$, får vi $u_x(0,t) = F'(0)G(t) = 0$ som gir $F'(0) = 0$. På samme måten får man at $F'(\pi) = 0$.

Hvis $k > 0$, er den generelle løsningen til (L-6) gitt av

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$$

der $\mu = \sqrt{k}$. Vi har $F'(x) = \mu A e^{\mu x} - \mu B e^{-\mu x}$, og $F'(0)$ gir $A = B$ og $F'(\pi)$ gir $\mu A(e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi}) = 0$. Siden $\mu \neq 0$, dette fører til at $A = 0$ og vi får den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$.

Hvis $k = 0$, er den generelle løsningen til (L-6) gitt av

$$F(x) = Ax + B$$

Vi har $F'(x) = A$. Derfor $F'(0)$ gir $A = 0$ og da har vi også at $F'(\pi) = 0$. Derfor er $F(x) = B$ en løsning til (L-6).

Hvis $k < 0$, er den generelle løsningen til (L-6) gitt av

$$F(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

der $\mu = \sqrt{-k}$. Vi har $F'(x) = -\mu A\sin(\mu x) + \mu B\cos(\mu x)$. Derfor $F'(0)$ gir $B = 0$ og $F'(\pi) = 0$ medfører at

$$\mu B \sin(\mu\pi) = 0$$

Siden $\mu \neq 0$, får vi at $\sin(\mu\pi) = 0$ det vil si at $\mu = n$ og $k = -n^2$ for $n = 1, 2, \ldots$

Nå løser vi ligningen

$$G''(t) = kG(t)$$

For $k = 0$ får vi

$$G(t) = Bt + A.$$

For $k = -n^2$ får vi

$$G(t) = A\cos(nt) + B\sin(nt)$$

Løsningene av den form $u(x,t) = F(x)G(t)$ er

$$u_0(x,t) = B_0 t + A_0$$

og

$$u_n(x,t) = (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))\cos(nx). \tag{L-7}$$

b) Vi tar to løsninger u og v av (1) og (2). La $w(x,t) = au(x,t) + bv(x,t)$ for to vilkårlige konstanter a og b. Ligninen (1) med randbetingelse (2) tilfredstiller superposisjonsprinsippet hvis w er også en løsning. Vi har

$$\begin{aligned} w_{tt} &= au_{tt} + bv_{tt} \\ &= au_{xx} + bv_{xx} \text{ siden } u \text{ og } v \text{ er løsninger til (1)} \\ &= aw_{xx} \end{aligned}$$

og w er en løsning til (1). Vi har også at

$$w_x(0,t) = au_x(0,t) + bv_x(0,t) = 0$$

og

$$w_x(\pi,t) = au_x(\pi,t) + bv_x(\pi,t) = 0.$$

Derfor w er en løsning til (1) og (2) og vi har vist at systemet som består av ligningen (1) og randbetingelsene (2) tilfredstiller superposisjonsprinsippet.

Ved å bruke superposisjonsprinsippet, får man den generelle løsningen til (1)-(2) som er gitt av

$$u(x,t) = A_0 t + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos(nt) + A_n \sin(nt))\cos(nx).$$

Vi må bestemme A_n og B_n slik at u tilfredstiller startbetingelsene

$$u(x,0) = \cos^2(x) \tag{L-8}$$

og

$$u_t(x,0) = \cos(3x). \tag{L-9}$$

Vi har

$$u(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nx) = \cos^2(x)$$

På venstre siden har vi Cosinusrekken til $u(x,0)$. Siden $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$, får vi at

$$B_0 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{2} \text{ og } B_n = 0 \text{ hvis } n \neq 0, 2.$$

Vi har

$$u_t(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-nB_n \sin(nt) + nA_n \cos(nt)) \cos(nx)$$

som gir

$$u_t(x,0) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos(nx) = \cos(3x)$$

På venstre siden har vi nå Cosinusrekken til $u_t(x,0)$ og det fører til at

$$A_3 = \frac{1}{3}.$$

Til slutt får man løsningen

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)\cos(2x) + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3x).$$

Oppgave 4

a) Ved å bruker tilnærmingene

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}}{h^2},$$
$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j}}{h^2}$$

i hvert punkt (x_i, y_j) får man den følgende numeriske metoden

$$\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} = x_i u_{i,j} \tag{L-10}$$

I punktet $(x_1, y_1) = (h, h)$, siden $u_{1,0} = x_1 = h$ og $u_{0,1} = 0$, blir (L-10) til

$$\frac{u_{21} + u_{12} + h - 4u_{11}}{h^2} = hu_{11}$$

som kan skrives om

$$27u_{21} + 27u_{12} - 109u_{11} = -9$$

der vi har brukt at $h = \frac{1}{3}$.

I punktet $(x_2, y_1) = (2h, h)$, siden $u_{2,0} = x_2 = 2h$ og $u_{3,1} = 1$, blir (L-10) til

$$\frac{1 + u_{22} + u_{112} + 2h - 4u_{21}}{h^2} = 2hu_{21}$$

som kan skrives om

$$27u_{22} + 27u_{11} - 110u_{21} = -45.$$

I punktet $(x_1, y_2) = (h, 2h)$, siden $u_{1,3} = x_1 = h$ og $u_{0,2} = 0$, blir (L-10) til

$$\frac{u_{11} + u_{22} + h - 4u_{12}}{h^2} = hu_{12}$$

som kan skrives om

$$27u_{22} + 27u_{11} - 109u_{12} = -9.$$

I punktet $(x_2, y_2) = (2h, 2h)$, siden $u_{2,3} = x_2 = 2h$ og $u_{3,2} = 1$, blir (L-10) til

$$\frac{2h + 1 + u_{12} + u_{21} - 4u_{22}}{h^2} = 2hu_{22}$$

som kan skrives om

$$27u_{12} + 27u_{21} - 110u_{22} = -45.$$

Til slutt, får vi det følgende systemet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-109\,u_{11} & + & 27\,u_{21} & + & 27\,u_{12} & & & = & -9 \\
27\,u_{11} & - & 110\,u_{21} & + & & & 27\,u_{22} & = & -45 \\
27\,u_{11} & & & - & 109\,u_{12} & + & 27\,u_{22} & = & -9 \\
 & & 27\,u_{21} & + & 27\,u_{12} & - & 110\,u_{22} & = & -45
\end{array}$$

for $(u_{11}, u_{21}, u_{12}, u_{22})$.

b) Gauss-Seidel metoden kan skrives som

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
-109\,x_1^{(k+1)} & + & 27\,x_2^{(k)} & + & 27\,x_3^{(k)} & & & = & -9 \\
27\,x_1^{(k+1)} & - & 110\,x_2^{(k+1)} & + & & & 27\,x_4^{(k)} & = & -45 \\
27\,x_1^{(k+1)} & & & - & 109\,x_3^{(k+1)} & + & 27\,x_4^{(k)} & = & -9 \\
 & & 27\,x_2^{(k+1)} & + & 27\,x_3^{(k+1)} & - & 110\,x_4^{(k+1)} & = & -45
\end{array}$$

Man får

$$x_1 = 0.5779 \qquad x_2 = 0.7964$$
$$x_3 = 0.4734 \qquad x_4 = 0.7207$$

Oppgave 5

a) Vi lager *Newtons divided difference interpolation* tabell

x_j	$f_j = f(x_j)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, \ldots, x_{j+3}]$	$f[x_j, \ldots, x_{j+4}]$
0	1				
		5			
0.25	2.25		12		
		11		16	
0.5	5		24		0
		23		16	
0.75	10.75		36		
		41			
1	21				

og man får
$$P(x) = 1 + 5x + 12x(x - 0.25) + 16x(x - 0.25)(x - 5)$$
som forenkler seg til
$$P(x) = 16x^3 + 4x + 1.$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,dx &= \int_0^1 (16x^3 + 4x + 1)\,dx \\ &= \left[16\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= 7.\end{aligned}$$

Simpsons regel gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,dx \approx S_n &= \frac{\Delta x}{3}(P(0) + 4P(0.25) + 2P(0.5) + 4P(0.75) + P(1)) \\ &= \frac{0.25}{3}(1 + 4\cdot 2.25 + 2\cdot 5 + 4\cdot 10.75 + 21) \\ &= 7.\end{aligned}$$

Feilestimat for feilen er gitt av

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S_n\right| \leq \frac{f^4(c)(b-a)^5}{180n^2}$$

for noen $c \in [0,1]$. Siden P har graden 3 har vi $P^{(4)}(x) = 0$. Det vil si at feilen blir null for P . Den *degree of precision* til Simpsons metode er lik 3 og metoden gir den eksakte verdien av integralet til P.