Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høsten 2012

Øving 13

Bare de som mangler én øving skal levere denne øvinga.

Frist: Fredag 23. november, kl. 09:00.

Submission deadline: Friday, November 23rd, 09:00 a.m.

$\boxed{1}$ **a)** Vi vil løse ligningen

$$u_{xx} + u_{yy} = 27(x + y),$$

på enhetskvadratet $[0, 1] \times [0, 1]$ med randbetingelser

$$u(0, y) = u(x, 0) = 0, \qquad u(x, 1) = 3x, \qquad u(1, y) = 3y.$$

Finn en tilnærming til løsningen $u(x, y)$ ved å bruke sentraldifferanser for å approksimere u_{xx} og u_{yy}. La $h = 1/3$ være skrittlengden, og la gitteret være gitt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ for $i, j = 0, ..., 3$. Sett opp et system av ligninger for $U_{1,1}, U_{2,1}, U_{1,2}$ og $U_{2,1}$, der $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$.

b) Utfør én Gauss-Seidel-iterasjon på systemet du fikk i oppgave a). Bruk som startvektor $\mathbf{x_0} = -(1, 1, 1, 1)$.

$\boxed{2}$ Det oppgis at funksjonen $f(x) = \sin^2 x$ for $0 \leq x \leq \pi$ har Fouriersinusrekke

$$-\frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m + 1)x}{(2m - 1)(2m + 1)(2m + 3)}. \tag{1}$$

Skisser grafen til summen av rekka (1) for $-2\pi \leq x \leq 2\pi$. Bruk (1) til å finne summen av rekka

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m - 1)(2m + 1)(2m + 3)}.$$

$\boxed{3}$ La problemet

$$\begin{array}{rll} (i) & u_t = u_{xx} & t > 0, 0 < x < 1 \\ (ii) & u(0, t) = u(1, t) = 0 & t \geq 0 \\ (iii) & u(x, 0) = 8x(1 - x) & 0 \leq x \leq 1 \end{array}$$

være gitt. Crank-Nicolsons skjema kan generelt gis ved

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \frac{k}{2h^2}(U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n + U_{i-1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i+1}^{n+1}) \tag{2}$$

La $\Delta x = h = \frac{1}{4}, \Delta t = k = \frac{1}{16}$, og utled ligningsystemet for $U_i^1 = U(ih, k), i = 1, 2, 3,$ ved å bruke Crank-Nicolson som numerisk skjema.

$\boxed{4}$ La $x_0 = \frac{3}{4}, y_0 = 1, z_0 = \frac{3}{4}$, og gjør èn iterasjon med Gauss-Seidel på ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ -x + 4y - z &= 3 \\ -y + 4z &= 2 \end{aligned}$$