



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høsten 2012

Øving 5

- 1 La f være en 2π -periodisk funksjon slik at $f(x) = e^x$ for $-\pi < x < \pi$. Denne funksjonen har Fourier-rekke

$$\frac{\sinh \pi}{\pi} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx) - \sin(nx)}{1 + n^2} \right].$$

Ved å bruke dette, finn summen av rekkene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} \quad \text{og} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}.$$

Pensum: Kreyszig, 10. utgave, avsnitt 11.4 (avsnitt 11.6 i 9. utgave)

- 2 La funksjonen $f(x)$ være definert som

$$f(x) = \begin{cases} x & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Finn det trigonometriske polynomet $F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$ slik at kvadratfeilen $\|F(x) - f(x)\|$ på intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$ er minimal, og regn ut denne minimale verdien for $N = 0, 1, \dots, 5$.

- 3 Bevis at rekken under konvergerer mot den oppgitte summen. (Bruk Parsevals identitet)

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

Bruk at Fourierrekken til $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$ er

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

Pensum: Kreyszig, avsnitt 11.7

- 4 Bevis at integralet blir funksjonen som er gitt til høyre. Vis alle utregninger.

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(\pi w)}{w} \sin(xw) dw = \begin{cases} \pi/2, & \text{hvis } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{hvis } x > \pi. \end{cases}$$