Løsningsforslag — Øving 10

$\boxed{1}$ Man får ved Gauss-eliminasjon at

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

så det er ingen løsninger.

$\boxed{2}$ a) Jacobi-metoden er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^{(m)}$$

De første to iterasjonene blir

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.125 \\ 0.25 \end{bmatrix}.$$

b) Gauss-Seidel-metoden er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(m)}$$

De første to iterasjonene blir

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.0625 \\ 0.23438 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.23438 \\ 1.13281 \\ 0.21680 \end{bmatrix}.$$

En kan se at Gauss-Seidel-metoden konvergerer raskere enn Jacobi, dette er som oftest tilfelle.

c) Vi vet at Jacobi og Gauss-Seidel for et lineært system $Ax = b$ kan skrives på den generelle formen $Mx^{(n+1)} = Nx^{(n)} + b$. Vi multipliserer med M^{-1} for å få formen oppgaven ber om,

$$x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b,$$

og vi har $C = M^{-1}N$ og $g = M^{-1}b$. For at vi skal ha konvergens må $\|C\| < 1$ være oppfylt, der $\|\cdot\|$ er en aller en annen norm. Vi bruker Frobeniusnormen, og for Jacobiiterasjonen får vi,

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2} = \sqrt{4\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} < 1$$

med andre ord vi har konvergens. For Gauss-Seidel får vi

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2} = \sqrt{0.2500^2 + 0.0625^2 + 0.2500^2 + 0.015625^2 + 0.0625^2} = 0.3648 < 1$$

som impliserer konvergens.

$\boxed{3}$ **a)** Den rektangulære metoden gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(f(1/8) + f(3/8) + f(5/8) + f(7/8)) \\ &= 0.153931\end{aligned}$$

b) Trapesmetoden gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\approx h\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}f(0) + f(1/4) + f(1/2) + f(3/4) + \frac{1}{2}f(1)\right) \\ &= 0.192383\end{aligned}$$

c) Simpson's metode gir

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &\approx h\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{1}{3}f(x_{2i}) + \frac{4}{3}f(x_{2i+1}) + \frac{1}{3}f(x_{2i+2})\right) \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\left(f(0) + 4f(1/4) + 2f(1/2) + 4f(3/4) + f(1)\right) \\ &= 0.167969\end{aligned}$$

d) Den eksakte verdien av integralet er

$$\int_0^1 x^5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Vi setter opp en tabell med metode og tilhørende feil:

Metode	$\lvert\epsilon\rvert$
Rektangulær	0.0127357
Trapes	0.0257163
Simpson	0.00130233

Simpsons metode gir som forventet den minste feilen. Den rektangulære metoden gir et bedre resultat enn trapesmetoden i dette tilfellet, selv om det oftest vil være motsatt.

4 Vi skal løse ligningssystemet

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 25 \\
-5x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= -4 \\
x_1 + 22x_2 - 23x_3 &= 71
\end{aligned}
$$

ved Gausseliminasjon. I dette tilfelle pivoterer vi siden koeffisienten foran x_1 i den andre ligningen har den største absoluttverdien i forhold til de tilsvarende koeffisientene i de andre ligningene. Vi setter i stedet

$$
\begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 & | & -4 \\ 2 & 5 & 7 & | & 25 \\ 1 & 22 & -23 & | & 71 \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 & | & -4 \\ 0 & 7.8 & 7.8 & | & 23.4 \\ 0 & 23.4 & -22.6 & | & 70.2 \end{bmatrix}.
$$

Den tredje ligningen har nå høyere koeffisient foran x_2-leddet, så vi bytter dem om:

$$
\begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 & | & -4 \\ 0 & 23.4 & -22.6 & | & 70.2 \\ 0 & 7.8 & 7.8 & | & 23.4 \end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 & | & -4 \\ 0 & 23.4 & -22.6 & | & 70.2 \\ 0 & 0 & \frac{46}{3} & | & 0 \end{bmatrix}.
$$

Altså må $x_3 = 0$. Dette gir $x_2 = \frac{70.2}{23.4} = 3$ som igjen gir $x_1 = \frac{-4-7\cdot 3}{-5} = 5$. Oppsummert får vi

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 5 \\
x_2 &= 3 \\
x_3 &= 0
\end{aligned}
$$

5 Vi vil finne koeffisientene $m_{i,j}$ og $u_{i,j}$ slik at

$$
\begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 9 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & 1 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{bmatrix}
$$

Vi tar en rad (fra den øverste til den nederste) og en kolonne (fra venste til høyre) av gangen. Vi får

1. rad: $\boxed{u_{1,1} = 5}$, $\boxed{u_{1,2} = 9}$, $\boxed{u_{1,3} = 2}$

2. rad:

1. kolonne: $9 = m_{2,1}u_{1,1} \Rightarrow \boxed{m_{2,1} = 9/5}$

2. kolonne: $4 = m_{2,1}u_{1,2} + u_{2,2} \Rightarrow \boxed{u_{2,2} = -61/5}$

3. kolonne: $1 = m_{2,1}u_{1,3} + u_{2,3} \Rightarrow \boxed{u_{2,3} = -13/5}$

3. rad:

1.kolonne: $2 = m_{3,1}u_{1,1} \Rightarrow \boxed{m_{3,1} = 2/5}$

2. kolonne: $1 = m_{3,1}u_{1,2} + m_{3,2}u_{2,2} \Rightarrow \boxed{m_{3,2} = 13/61}$

3. kolonne: $1 = m_{3,1}u_{1,3} + m_{3,2}u_{2,3} + u_{3,3} \Rightarrow \boxed{u_{3,3} = 46/61}$

Vi får

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 13/61 & 1 \end{bmatrix}$$

og

$$U = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 0 & -61/5 & -13/5 \\ 0 & 0 & 46/61 \end{bmatrix}$$

Man løser først $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, d.v.s.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9/5 & 1 & 0 \\ 2/5 & 13/61 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 25 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Vi får $y_1 = 24$ og $y_2 = 25 - \frac{9}{5}y_1 = -\frac{91}{5}$ og $y_3 = 11 - \frac{2}{5}y_1 - \frac{13}{61}y_2 = \frac{322}{61}$

Løsningen $\mathbf{x}$ til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er gitt ved

$$U\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

eller

$$\begin{bmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 0 & -61/5 & -13/5 \\ 0 & 0 & 46/61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ -91/5 \\ 322/61 \end{bmatrix}$$

Dermed,

$$x_3 = \frac{322}{46} = 7$$

og

$$x_2 = -\frac{5}{61}\left(-\frac{91}{5} + \frac{13}{5}x_3\right) = 0$$

og

$$x_1 = \frac{1}{5}(24 - 9x_2 - 2x_3) = 2$$

Løsningen er

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$