Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 12

$\boxed{1}$

$$y'' = \cos(y), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \tag{1}$$

a) Vi innfører nye variable og skriver det som et system.

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= 0 \\ y_2' &= \cos(y_1), & y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Ved å derivere y_1' slik at vi får $y_1'' = y_2'$ ser vi at vi ender opp med (1) ved å sette inn for $y_2' = \cos(y_1)$.

b) Heuns metode er gitt ved

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{n+1}^* &= \boldsymbol{y}_n + h\boldsymbol{f}(x_n, \boldsymbol{y}_n) \\ \boldsymbol{y}_{n+1} &= \boldsymbol{y}_n + \frac{1}{2}h\left[\boldsymbol{f}(x_n, \boldsymbol{y}_n) + \boldsymbol{f}(x_{n+1}, \boldsymbol{y}_{n+1}^*)\right], \end{aligned}$$

hvor $\boldsymbol{y}$ og $\boldsymbol{f}$ kan være vektorer. Fra **a)** skriver vi systemet vårt på vektorform som

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} y_2 \\ \cos(y_1) \end{bmatrix} = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}),$$

hvor vektoren $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$. Initialvektoren vår blir da $\boldsymbol{y}_0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi ser at ligningssystemet vårt er *autonomt*, dvs ikke avhengig av x.

Første skritt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y}_1^* &= \boldsymbol{y}_0 + h\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 1.1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{y}_1 &= \boldsymbol{y}_0 + \frac{1}{2}h\left[\boldsymbol{f}(x_0, \boldsymbol{y}_0) + \boldsymbol{f}(x_1, \boldsymbol{y}_1^*)\right] \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.05 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \cos(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 \\ \cos(0.1) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Andre skritt

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_2^* &= \boldsymbol{y}_1 + h\boldsymbol{f}(x_1, \boldsymbol{y}_1) = \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} + 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1.0998 \\ \cos(0.1050) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2150 \\ 1.1992 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{y}_2 &= \boldsymbol{y}_1 + \frac{1}{2}h\left[\boldsymbol{f}(x_1, \boldsymbol{y}_1) + \boldsymbol{f}(x_2, \boldsymbol{y}_2^*)\right] \\
&= \begin{bmatrix} 0.1050 \\ 1.0998 \end{bmatrix} + 0.05 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1.0998 \\ \cos(0.1050) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1992 \\ \cos(0.2150) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.2199 \\ 1.1983 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Siden det er første element i $\boldsymbol{y}$ som inneholder $y = y_1$, blir svaret $y(0.2) \approx 0.2199$.

$\boxed{2}$ **a)** Vi innfører nye variable $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ og får differensialligningssystemet

$$
\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= (1 - y_1^2)y_2 - y_1 \end{aligned} \qquad \text{med initialbetingelser} \qquad \begin{aligned} y_1(0) &= 2 \\ y_2(0) &= 0. \end{aligned}
$$

b) For differensialligningssystemet i **a)** blir "Baklengs Euler" gitt ved

$$
\begin{bmatrix} y_{1,n+1} \\ y_{2,n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1,n} \\ y_{2,n} \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} y_{2,n+1} \\ (1 - y_{1,n+1}^2)y_{2,n+1} - y_{1,n+1} \end{bmatrix}
$$

Med $n = 0, h = 0.1$ og initialbetingelsene $y_{1,0} = 2$ og $y_{2,0} = 0$ får vi ligningssystemet

$$
\begin{aligned} y_{1,1} &= 2 + 0.1y_{2,1} \\ y_{2,1} &= 0.1[(1 - y_{1,1}^2)y_{2,1} - y_{1,1}]. \end{aligned}
$$

Multipliserer vi begge ligningene med 10, kan ligningssystemet skrives

$$
\begin{aligned} 10y_{1,1} - y_{2,1} - 20 &= 0 \\ y_{1,1} + (9 + y_{1,1}^2)y_{2,1} &= 0. \end{aligned}
$$

c) Ligningssystemet

$$
\begin{aligned} 10y_1 - y_2 - 20 &= 0 \\ y_1 + (9 + y_1^2)y_2 &= 0. \end{aligned}
$$

har Jacobimatrise

$$
J(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 + 2y_1y_2 & 9 + y_1^2 \end{bmatrix}.
$$

Vi lar nå y_i^n være den numeriske løsningen av y_i etter n iterasjoner med Newtons metode, der $i = 1, 2$. For finne $y_1^1 = y_1^0 + \Delta y_1^0$ og $y_2^1 = y_2^0 + \Delta y_2^0$ løser vi ligningen

$$
J(y_1^0, y_2^0) \begin{bmatrix} \Delta y_1^0 \\ \Delta y_2^0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 10y_1^0 - y_2^0 - 20 \\ y_1^0 + (9 + (y_1^0)^2)y_2^0 \end{bmatrix}
$$

med hensyn på$(\Delta y_1^0, \Delta y_2^0)^T$. Med startverdiene $y_1^0 = 2$ og $y_2^0 = 0$ får vi

$$
\begin{bmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y_1^0 \\ \Delta y_2^0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

som gir

$$\begin{bmatrix}\Delta y_1^0\\ \Delta y_2^0\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}10 & -1\\ 1 & 13\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = -\frac{1}{131}\begin{bmatrix}13 & 1\\ -1 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0.02\\0.15\end{bmatrix}.$$

Følgelig får vi

$$y_1^1 = 1.98 \quad \text{og} \quad y_2^1 = -0.15.$$

$\boxed{3}$ Vi bruker fempunktsformelen for approksimere $u_{xx} + u_{yy}$, altså

$$u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2}$$

der $u_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$. Ved sette dette inn i ligninga får vi

$$\begin{aligned}\frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} &= -1\\ u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j} &= -h^2\end{aligned}$$

Vi har 4 ukjente (de 4 punktene i midten) og før disse 4 ligningene

$$\begin{aligned}-4u_{1,1} + u_{2,1} + u_{1,2} &= -h^2\\ u_{1,1} - 4u_{2,1} + u_{2,2} &= -h^2\\ u_{1,1} - 4u_{1,2} + u_{2,2} &= -h^2\\ u_{2,1} + u_{1,2} - 4u_{2,2} &= -h^2\end{aligned}$$

der vi har satt alle nodene på randen lik 0. Vi har $h = \frac{1}{3}$, da får vi $-h^2 = -\frac{1}{9}$. Dette ligningssystemet kan da skrives som

$$\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -4 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1,1}\\ u_{2,1}\\ u_{1,1}\\ u_{2,2}\end{bmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Approksimasjon av likningen i noden (x_i, y_j) ved hjelp av sentraldifferanser gir

$$U_{i+1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} + U_{i-1,j} - 4U_{i,j} = h^2 f(x_i, y_j),$$

hvor $U_{i,j} \approx u(x_i, y_j)$, $f(x, y) = 27(x + y)$, $x_i = ih$, $y_j = jh$ og $h = 1/3$. Approksimasjon av likningen i (x_i, y_j), hvor $i, j \in \{1, 2\}$, gir likningene

$$\begin{aligned}-4U_{1,1} + U_{1,2} + U_{2,1} + 0 + 0 &= (1/3)^2 27(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}),\\ U_{1,1} - 4U_{2,1} + U_{2,2} + 0 + 3\cdot\frac{1}{3} &= (1/3)^2 27(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}),\\ U_{1,1} - 4U_{1,2} + U_{2,2} + 3\cdot\frac{1}{3} + 0 &= (1/3)^2 27(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}),\\ U_{2,1} + U_{1,2} - 4U_{2,2} + 3\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} &= (1/3)^2 27(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}).\end{aligned}$$

Dette kan skrives på matriseform

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{1,2} \\ U_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) En iterasjon med Gauss-Seidel gir $U_{1,1}^1 = -1, U_{2,1}^1 = -1, U_{1,2}^1 = -1, U_{2,2}^1 = -0.5$.

$\boxed{5}$ Ligningene for de 3 indre nodene er

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} - u_1^n &= \frac{k}{2h^2}\left(u_2^n - 2u_1^n + u_2^{n+1} - 2n_1^{n+1}\right) \\ u_2^{n+1} - u_2^n &= \frac{k}{2h^2}\left(u_3^n - 2u_2^n + u_1^n + u_3^{n+1} - 2n_2^{n+1} + u_1^{n+1}\right) \\ u_3^{n+1} - u_3^n &= \frac{k}{2h^2}\left(-2u_3^n + u_2^n - 2n_3^{n+1} + u_2^{n+1}\right) \end{aligned}$$

La $n = 0$, $\frac{k}{2h^2} = \frac{1}{2}$, $u_1^0 = u(\frac{1}{4}, 0) = \frac{3}{2}$, $u_2^0 = u(\frac{1}{2}, 0) = 2$, $u_3^0 = u(\frac{3}{4}, 0) = \frac{3}{2}$. Dette gir

$$\begin{aligned} 2u_1^1 - \frac{1}{2}u_2^1 \qquad &= 1 \\ -\frac{1}{2}u_1^1 + 2u_2^1 - \frac{1}{2}u_3^1 &= \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}u_2^1 + 2u_3^1 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{eller} \qquad \begin{aligned} 4u_1^1 - u_2^1 \qquad &= 2 \\ -u_1^1 + 4u_2^1 - u_3^1 &= 3 \\ -u_2^1 + 4u_3^1 &= 2 \end{aligned}$$