TMA4130
Matematikk 4N
Høsten 2013

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 13

1 Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $(f * g)(t)$ med $f(t) = t$ og $g(t) = e^t$.

$$
\begin{aligned}
t * e^t &= \int_0^t f(v)g(t-v)\,\mathrm{d}v = \int_0^t ve^{t-v}\,\mathrm{d}v \\
&= \left[v\left(-e^{t-v}\right)\right]_{v=0}^t + \int_0^t e^{t-v}\,\mathrm{d}v \qquad \text{(delvis integrasjon)} \\
&= -t + \left[-e^{t-v}\right]_{v=0}^t = e^t - t - 1
\end{aligned}
$$

2 Vi skal løse integralligningen

$$
y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin t + (y * \sin t)(t).
$$

Ved laplacetransformasjon får vi

$$
Y = \frac{1}{s^2+1} + Y\frac{1}{s^2+1}
$$

$$
\Rightarrow \quad s^2 Y = 1 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t
$$

3 Vi skal finne den komplekse Fourierrekka til $f(x) = x^2$, $-\pi < x < \pi$.
Formel ??? på side ??? i Kreyszig gir

$$
c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x.
$$

Vi må skille mellom $n = 0$ og $n \neq 0$ og får (ved to delvis integrasjoner når $n \neq 0$):

$$
c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}, \qquad (n=0)
$$

og

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{-in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{i\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{in}e^{in\pi} - \frac{\pi^2}{in}e^{-in\pi}\right) + \frac{1}{i\pi n}\left[\frac{x}{-in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi n}\left(\frac{\pi}{n}e^{-in\pi} + \frac{\pi}{n}e^{in\pi}\right) - \frac{1}{\pi n^2}\frac{1}{in}\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 2\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{\pi i n^3}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right) \\
&= 2\frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$.

Ergo har $f(x)$ kompleks Fourierrekke

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}.$$

Vi merker oss her at $c_n = c_{-n}$, så vi har at $a_n = 2c_n$ og $b_n = 0$. Altså er

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$\boxed{4}$ Vi har fra oppgave 3 at det komplekse Fourierrekken til f er

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}.$$

Vi får da

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} 2\cos nx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx
\end{aligned}$$

som er (cosinus) Fourierrekken i reell form.

5 Vi skal bruke Fourierintegral til å vise at

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw + w \sin xw}{1+w^2}\,\mathrm{d}w = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 0 \\ \pi/2 & \text{hvis } x = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

Legg merke til at $\pi/2$ er middelverdien av 0 og $\pi e^0 = \pi$. Derfor er

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\,\mathrm{d}w, \qquad \forall x$$

der $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\cos wv\,\mathrm{d}v$ og $B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(v)\sin wv\,\mathrm{d}v$, for

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 0 \\ \pi/2 & \text{hvis } x = 0 \\ \pi e^{-x} & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

Vi får ved bruk av Rottmann, formel 123 og 133 side 144 at

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi e^{-v}\cos wv\,\mathrm{d}v = \left[\frac{e^{-v}}{1+w^2}(-\cos wv + w\sin wv)\right]_0^\infty = \frac{1}{1+w^2}$$
$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi e^{-v}\sin wv\,\mathrm{d}v = \left[\frac{e^{-v}}{1+w^2}(-\sin wv - w\cos wv)\right]_0^\infty = \frac{w}{1+w^2}$$

Følgelig kan $f(x)$ representeres ved Fourierintegralet

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xw + w\sin xw}{1+w^2}\,\mathrm{d}w.$$

6 Siden funksjonen $\sin(xw)$ er en odde funksjon blir $\int_{-1}^1 e^{-ixw}dx = \int_{-1}^1 \cos(xw)dx$. Altså blir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 e^{-ixw}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^1 \cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(xw)}{w}\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}.$$

Dersom $f(x)$ betegner funksjonen som er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for} & |x| = 1 \\ 1 & \text{for} & |x| < 1 \end{cases}$$

har vi nettopp regnet ut at $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(w)}{w}$, og derfor er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixw}\hat{f}(w)dw$. Siden $\hat{f}(w)$ er en likefunksjon er $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xw)\hat{f}(w)dw$. Ved å sette inn $\hat{f}(w)$ har vi $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(xw)\sin w}{w}dw$. Ved å velge $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{1}{2}w)\sin w}{w}dw = \frac{\pi}{2}.$$

7 **a)** Ligningen gir

$$F(x)[G''(t)+G'(t)] = F''(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{G''(t)+G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

der k må være konstant. Følgelig har vi

$$F''(x) = kF(x), \tag{1}$$
$$G''(t)+G'(t) = kG(t). \tag{2}$$

Randbetingelsen gir

$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{3}$$

Vi løser først randverdiproblemet (1), (3). Det er tre muligheter:

1. $k > 0$. Da skriver vi $k = \mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, men (3) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k > 0$.
2. $k = 0$. Gir generell løsning $F(x) = Ax + B$, men (3) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k = 0$.
3. $k < 0$. Da skriver vi $k = -\mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, men (3) gir $A = 0$ og $B\sin\mu x = 0$. Derfor må $\mu = n$, der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi konkluderer med at $F(x) = F_n(x) = B_n \sin nx$, svarende til $k = -n^2$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nå løser vi (2) med $k = -n^2$, dvs.

$$G''(t) + G'(t) + n^2 G(t) = 0$$

Karakteristisk ligning er $\lambda^2 + \lambda + n^2 = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 - \frac{1}{4} = 0$, som har røtter

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

Derfor er

$$G(t) = G_n(t) = e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}\right)$$

og vi konkluderer:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2-\frac{1}{4}}\right) B_n \sin nx$$

men vi kan sette $B_n = 1$ (vi har allerede to vilkårlige konstanter C_n og D_n, så B_n kan bakes"inn der).

b) Her er det bare $u(x,t) = u_4(x,t)$ som kan komme i betraktning. Vi har fra svaret på forrige punkt (med $B_n = 1$),

$$u(x,0) = C_4 \sin 4x = 0 \quad \text{(fra initialbet.)} \quad \Rightarrow \quad C_4 = 0.$$

Vi står derfor igjen med

$$u(x,t) = e^{-t/2} D_4 \sin\frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x.$$

Men da er

$$u_t(x,0) = -\frac{1}{2}e^{-t/2}D_4 \sin\frac{t\sqrt{63}}{2}\sin 4x + e^{-t/2}D_4\frac{\sqrt{63}}{2}\cos\frac{t\sqrt{63}}{2}\sin 4x$$

og innsatt $t = 0$:

$$u_t(x,0) = D_4\frac{\sqrt{63}}{2}\sin 4x = \sin 4x \quad \text{(fra initialbet.)} \quad \Rightarrow \quad D_4 = \frac{2}{\sqrt{63}}.$$

Svaret er altså

$$u(x,t) = e^{-t/2}\frac{2}{\sqrt{63}}\sin\frac{t\sqrt{63}}{2}\sin 4x$$

Her er et plot av løsningen: