Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høsten 2013

Løsningsforslag – Øving 5

$\boxed{1}$ Vi har fordi f er en odde funksjon.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos xw - i\sin xw)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\sin xw)dx =$$
$$-2i\int_{0}^{\infty} f(x)\sin xw dx = -2i\int_{0}^{1}\sin xw dx = 2i\left(\frac{\cos w - 1}{w}\right)$$

Altså er

$$\mathcal{F}(f)(w) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos w - 1}{w}$$

Merk at nær 0 har vi $\cos w = 1 - \frac{(w)^2}{2} + \frac{(w)^4}{24} - \cdots$, så nær 0 oppfører $\mathcal{F}(f)(w)$ som $\frac{-iw}{\sqrt{2\pi}}$.

$\boxed{2}$ The Fourier transform of $e^{-ax}H(x)$ is given by $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+i\omega}$ for $a > 0$. Making use of the formula $\widehat{f*g} = \sqrt{2\pi}\hat{g}\hat{f}$ we can transform the equation to

$$\hat{f} + \hat{f}\frac{1}{3+i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+i\omega}.$$

We can rearranging this to

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3+i\omega}{(1+i\omega)(2+i\omega)}.$$

The RHS can be simplified to

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2}{1+i\omega} - \frac{1}{2+i\omega}\right) = 2\widehat{e^{-x}H(x)} - \widehat{e^{-2x}H(x)}.$$

Transforming back yields

$$f = 2e^{-x}H(x) - e^{-2x}H(x).$$

$\boxed{3}$ Siden funksjonen $\sin(xw)$ er en odde funksjon blir $\int_{-1}^{1} e^{-ixw}dx = \int_{-1}^{1}\cos(xw)dx$. Altså blir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-ixw}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{1}\cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(xw)}{w}\right]_{0}^{1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}.$$

Dersom $f(x)$ betegner funksjonen som er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for} \quad |x| = 1 \\ 1 & \text{for} \quad |x| < 1 \end{cases}$$

har vi nettopp regnet ut at $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(w)}{w}$, og derfor er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw} \hat{f}(w) dw$. Siden $\hat{f}(w)$ er en likefunksjon er $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(xw) \hat{f}(w) dw$. Ved å sette inn $\hat{f}(w)$ har vi $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(xw) \sin w}{w} dw$. Ved å velge $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{1}{2}w) \sin w}{w} dw = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi setter $U(w,t) = \mathcal{F}(u)(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} u(x,t) dx$.
Fouriertransformerer vi ligningen blir den transformerte

$$U_t = -w^2 U - U = -(w^2 + 1)U.$$

Dette er en første ordens ordinær differensialligning, og den generelle løsningen er

$$U(w,t) = A(w) e^{-(w^2+1)t}.$$

Ved å sette inn for $t = 0$ ser vi at $A(w) = U(w, 0)$.

b) Initialbetingelsen gir $U(w,0) = \mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^2})(w) = e^{-\frac{1}{2}w^2}$. Fra punkt a) får vi derfor at

$$U(w,t) = e^{-\frac{1}{2}w^2} e^{-(w^2+1)t} = e^{-t} e^{-(t+\frac{1}{2})w^2}.$$

Den inverse Fouriertransformen gir oss

$$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2t+1}} e^{-\left(\frac{x^2}{4t+2}\right)}.$$