



Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4130
Matematikk 4N
Høsten 2013

Løsningsforslag — Øving 6

1 $\mathcal{L}(t^2 - 2t) = \int_0^\infty (t^2 - 2t)e^{-st} dt = \frac{2}{s^3} - \frac{2}{s^2}.$

2 Vi vet at $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Dermed har vi at

$$\mathcal{L}(\sin^2(4t)) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}(1 - \cos(8t))\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 64}\right).$$

3 Funksjonen (som vi kaller $f(t)$) er k mellom a og b og 0 ellers. Da får vi at

$$\mathcal{L}f(t) = \int_a^b ke^{-st} dt = \frac{k}{s}(e^{-sa} - e^{-sb}).$$

4 Her er det bare å dele opp og bruke linearitet, og man får

$$f = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2!}{s^3}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4!}{s^5}\right) = 1 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4.$$

5 Ved s -shift får man

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{s^2 + 5}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s + 5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sin \sqrt{5}t - e^{-5t}.$$

6 Igjen ved s -shift:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s - 6}{(s - 1)^2 + 4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s - 1 - 5}{(s - 1)^2 + 4}\right) = e^t \cos(2t) - \frac{5}{2}e^t \sin(2t).$$

7 Ved delbrøksoppspaltning får man

$$\mathcal{L}^{-1}\frac{1}{s(s - a)} = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$$

- 8 Ved å bruke Laplace-transformasjon på alle leddene (ved linearitet) får man

$$sY - y(0) + \frac{1}{2}Y = 17\frac{2}{s^2 + 4}.$$

Dette gir

$$Y = \frac{34}{(s^2 + 4)(s + \frac{1}{2})} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}}.$$

Delbrøksoppspaltning gir

$$Y = \frac{-8s + 4}{s^2 + 4} + \frac{7}{s + \frac{1}{2}},$$

og resultatet blir

$$y(t) = -8 \cos(2t) + 2 \sin(2t) + 7e^{-t/2}.$$

- 9 Denne oppgaven løses på samme måte som forrige oppgave. Laplace-transformasjon av alle ledd og delbrøksoppspaltning gir

$$Y = \frac{2,5}{s + 4} + \frac{0,5}{s + 3} + \frac{0,5}{s - 3},$$

som gir

$$y(t) = 2,5e^{-4t} + 0,5e^{-3t} + 0,5e^{3t}.$$

- 10 Dette er Example 1 i kapittel 6.2 i boka, og den er løst i detalj der. Kort sagt løser man oppgaven ved å derivere to ganger, og ta Laplace-transformasjon av denne likninga.