



1 Vi finner den Laplacetransformerte av

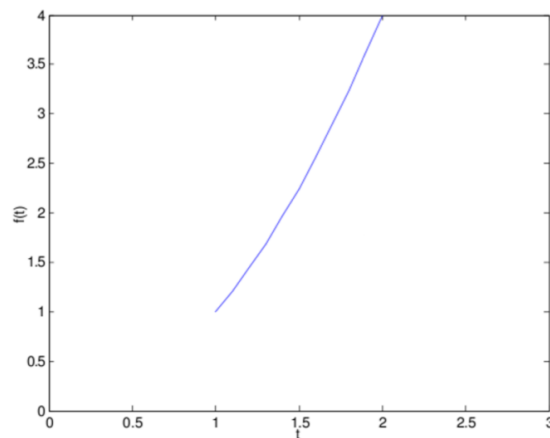
$$(t-1)^2 u(t-1)$$

ved å bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. forskyvningsregel) med $f(t) = t^2$ og $a = 1$. Vi får at

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)^2 u(t-1)\} &= e^{-s} \mathcal{L}(t^2)(s) \\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3}\end{aligned}$$

siden $\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$.

2 □



Figur 1: Plott av t^2 , $1 < t < 2$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^2 u(t-a)) &= e^{-as} \mathcal{L}((t+a)^2) \\ &= e^{-as} \mathcal{L}(t^2 + 2ta + a^2) \\ &= e^{-as} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2a}{s^2} + \frac{a^2}{s} \right)\end{aligned}$$

Vi får da

$$\mathcal{L}(t^2 u(t-1) - t^2 u(t-2)) = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) - e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s} \right)$$

3 Likningen kan skrives som

$$y'' + y = 1 - u(t - 1).$$

Laplace-transformasjon av likningen gir

$$Y = \frac{1}{s(s^2 + 1)}(1 - e^{-s}),$$

som etter delbrøksoppspaltning blir

$$Y = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}\right)(1 - e^{-s}).$$

Dermed blir svaret

$$y = (1 - \cos t) - (1 - \cos(t - 1))u(t - 1)$$

ved t -shifting.

4

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

Sett $Y = \mathcal{L}(y)$. Laplacetransformerer ligningen ($\mathcal{L}\{\delta(t - a)\} = e^{-as}$) og får

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + 4[sY - y(0)] + 5Y = e^{-s}$$

dvs.

$$(s^2 + 4s + 5)Y = 3 + e^{-s}$$

og følgelig

$$Y = \frac{3 + e^{-s}}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{1}{(s + 2)^2 + 1}e^{-s}.$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 2)^2 + 1}\right\} = e^{-2t} \sin t$$

ifølge skiftteorem 1. Ved også å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}(Y) = 3e^{-2t} \sin t + e^{-2(t-1)} \sin(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 3e^{-2t} \sin t & \text{for } 0 < t < 1 \\ e^{-2t} [3 \sin t + e^2 \sin(t-1)] & \text{for } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

5 a) Vi har

$$1 * 1 = \int_0^t dt = t.$$

- b) Vi skal beregne konvolusjonen $e^t * e^{-t}$. Vi setter inn i definisjonen for konvolusjon, og får:

$$\begin{aligned}(e^t * e^{-t}) &= \int_0^t e^\tau e^{-(t-\tau)} d\tau \\ &= e^{-t} \int_0^t e^{2\tau} d\tau \\ &= e^{-t} \left[\frac{1}{2} e^{2\tau} \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} (e^t - e^{-t}) \\ &= \sinh t\end{aligned}$$

- c) Vi skal finne $\sin \omega t * \cos \omega t$.

$$\begin{aligned}\sin \omega t * \cos \omega t &= \int_0^t \sin(\omega \tau) \cos(\omega t - \omega \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \sin(\omega \tau) + \sin(2\omega \tau - \omega t) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin(\omega \tau) \tau - \frac{1}{2\omega} \cos(2\omega \tau - \omega t) \right]_0^t \\ &= \frac{1}{2} \left(t \sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega} \cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega} \cos(-\omega t) \right) \\ &= \frac{1}{2} t \sin(\omega t)\end{aligned}$$

- d) Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $(f * g)(t)$ med $f(t) = t$ og $g(t) = e^t$.

$$\begin{aligned}t * e^t &= \int_0^t f(v)g(t-v) dv = \int_0^t v e^{t-v} dv \\ &= \left[v(-e^{t-v}) \right]_{v=0}^t + \int_0^t e^{t-v} dv \quad (\text{delvis integrasjon}) \\ &= -t + \left[-e^{t-v} \right]_{v=0}^t = e^t - t - 1\end{aligned}$$

- 6 Vi skal løse integralligningen

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = \sin t + (y * \sin)(t).$$

Ved laplacetransformasjon får vi:

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{s^2 + 1} + Y \frac{1}{s^2 + 1} \\ \Rightarrow s^2 Y &= 1 \quad \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow y(t) = t\end{aligned}$$

- 7 Vi vet at $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$ og at $\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2 + 1}$. Vi får at

$$1 * \sin t = 1 - \cos t.$$

Dermed er $\mathcal{L}(1 * \sin t) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}$, og ved t -shifting blir svaret $[1 - \cos(t - a)]u(t - a)$.

- 8 a)** Ved hjelp av Heavisidefunksjonen $u(t)$ kan vi skrive

$$f(t) = (t - 1)^2 u(t - 1).$$

Skifte på t -aksen gir oss da at

$$F(s) = \frac{2}{s^3} e^{-s}.$$

Integralregelen gir oss videre at

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{2}{s^4} e^{-s}.$$

- b)** Vi setter $X_1 = \mathcal{L}(x_1)$ og $X_2 = \mathcal{L}(x_2)$. Det transformerte systemet er da

$$\begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - (sX_2 - 1) &= G(s) \end{aligned}$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2}{s^4} e^{-s} - \frac{1}{s^2 + 1} \\ X_2 &= \frac{s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

Når vi transformerer tilbake får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}(t - 1)^3 u(t - 1) - \sin t \\ x_2 &= \cos t. \end{aligned}$$