Løsningsforslag eksamen i TMA4130 Matematikk 4N

Mandag 20. desember 2010

Oppgave 1

Lagrangeinterpolasjon:

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3.0\frac{x(x-1)(x-2)}{-1(-1-1)(-1-2)} + 0.5\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)} \\
&- 1.0\frac{(x+1)x(x-2)}{(1+1)(1)(1-2)} - 1.5\frac{(x+1)x(x-1)}{(2+1)(2)(2-1)} \\
&= -\frac{1}{2}(x^3-3x^2+2x) + \frac{1}{4}(x^3-2x^2-x+2) \\
&+ \frac{1}{2}(x^3-3x^2-2x) - \frac{1}{4}(x^3-x) \\
&= 0.5\,x^2 - 2.0\,x + 0.5
\end{aligned}$$

Newton's interpolasjonsformel:
Tabellen over dividerte differenser er gitt ved

x_i	$f[x_i]$			
-1.0	3.0			
		-2.5		
0.0	0.5		0.5	
		-1.5		0.0
1.0	-1.0		0.5	
		-0.5		
2.0	-1.5			

så interpolasjonspolynomet blir

$$\begin{aligned}
p(x) &= 3.0 - 2.5\,(x+1.0) + 0.5\,(x+1.0)x + 0.0(x+1.0)x(x-1.0) \\
&= 0.5\,x^2 - 2.0\,x + 0.5.
\end{aligned}$$

Oppgave 2 Vi kan skrive initialverdiproblemet på formen

$$y'' + 4y = 2\sin 2t\,\bigl[1 - u(t-\pi)\bigr], \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \tag{$*$}$$

La så $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Legg merke til at $\sin 2t = \sin 2(t-\pi)$. Laplace-transformerer så $(*)$. Det gir

$$s^2 Y + 4Y = \frac{4}{s^2+4}\bigl[1 - e^{-\pi s}\bigr],$$

det vil si

$$Y = \frac{4}{(s^2+4)^2}\bigl[1 - e^{-\pi s}\bigr].$$

Ettersom

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s^2+4)^2}\right\} = \sin 2t * \sin 2t = \frac{1}{4}\bigl(\sin 2t - 2t\cos 2t\bigr),$$

gir andre forskyningsteorem at

$$\begin{aligned}
y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \frac{1}{4}\bigl(\sin 2t - 2t\cos 2t\bigr) - \frac{1}{4}\bigl(\sin 2(t-\pi) - 2(t-\pi)\cos 2(t-\pi)\bigr)u(t-\pi) \\
&= \frac{1}{4}\bigl(\sin 2t - 2t\cos 2t\bigr) - \frac{1}{4}\bigl(\sin 2t - 2(t-\pi)\cos 2t\bigr)u(t-\pi) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{4}\bigl(\sin 2t - 2t\cos 2t\bigr) & \text{for } 0 \le t < \pi, \\ -\frac{\pi}{2}\cos 2t & \text{for } t > \pi. \end{cases}
\end{aligned}$$

Oppgave 3 Bruk hintet: Vi har at

$$F(s) = \ln\frac{s+1}{s+2} \qquad \Rightarrow \qquad F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

slik at

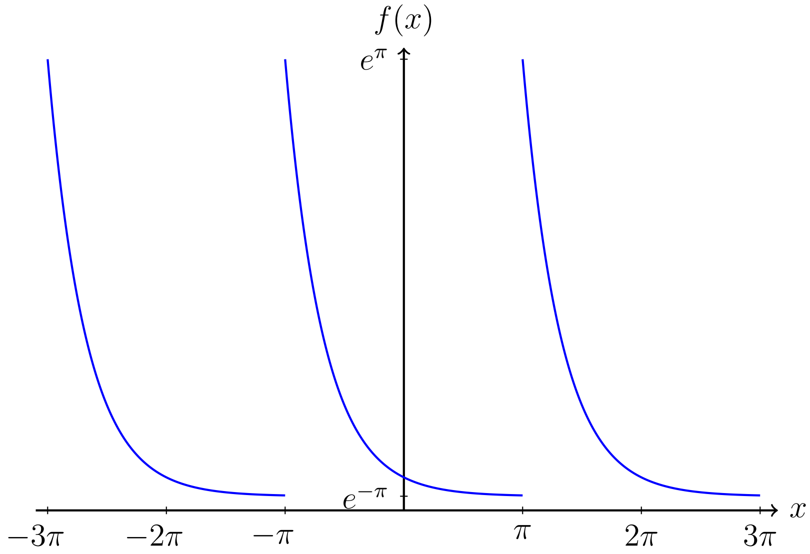
$$tf(t) = -\mathscr{L}^{-1}(F')(t) = -(e^{-t} - e^{-2t})$$

og

$$f(t) = -\frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}.$$

Oppgave 4

a) Grafen til den 2π-periodiske utvidelsen til $f(x)$ er gitt ved figuren under.



Den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

der

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{1+in}e^{-(1+in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{1+in}e^{-\pi}e^{-in\pi} + \frac{1}{1+in}e^{\pi}e^{in\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{1+in}(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi}) \\ &= \frac{\sinh\pi}{\pi}\,\frac{(-1)^n}{1+in}. \end{aligned}$$

Altså er den komplekse Fourier-rekken til $f(x)$ gitt ved

$$f(x) \sim \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+in}e^{inx}.$$

b) Ettersom $f(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$ får vi

$$f(0) = 1 = \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+in} = \frac{\sinh\pi}{\pi} + \frac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\right)$$

Siden

$$\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in} = \frac{2}{1+n^2}$$

ender vi med at

$$f(0) = 1 = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 - 1 + 2 \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right)$$

eller

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi}.$$

Ettersom $f(x)$ har et sprang i $x = \pi$ får vi, siden $e^{in\pi} = (-1)^n$, at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\big[f(\pi^+) + f(\pi^-)\big] = \cosh \pi = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+in} (-1)^n &= \\
&= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right) \\
&= \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right),
\end{aligned}$$

slik at

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \cosh \pi}{2 \sinh \pi} - 1 = \frac{\pi}{2 \tanh \pi} - 1.$$

Oppgave 5 Integralligningen kan skrives på formen

$$f(x) - (f * g)(x) = e^{-|x|}, \qquad g(x) = e^{-4|x|}. \tag{$*$}$$

La så $\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$. Fourier-transformerer så $(*)$. Det gir

$$\hat{f}(w) - \sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{w^2 + 16} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2+1},$$

det vil si

$$\left(1 - \frac{8}{w^2+16} \right) \hat{f}(w) = \frac{w^2+8}{w^2+16} \hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w^2+1}.$$

Altså har vi at

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{w^2+16}{(w^2+1)(w^2+8)}.$$

Delbrøkoppspalting gir så

$$\begin{aligned}
\frac{w^2+16}{(w^2+1)(w^2+8)} &= \frac{1}{w^2+1} + \frac{8}{(w^2+1)(w^2+8)} = \frac{1}{w^2+1} + \frac{8}{7} \left(\frac{1}{w^2+1} - \frac{1}{w^2+8} \right) \\
&= \frac{1}{7} \left(\frac{15}{w^2+1} - \frac{8}{w^2+8} \right).
\end{aligned}$$

Finner så $f(x)$ ved å ta inverstransformasjonen, det vil si

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \frac{1}{7}\left(15e^{-|x|} - \frac{8}{2\sqrt{2}}e^{-2\sqrt{2}|x|}\right) = \frac{1}{7}\big(15e^{-|x|} - 2\sqrt{2}e^{-2\sqrt{2}|x|}\big).$$

Oppgave 6

a) Setter inn $u(x,t) = X(x)T(t)$ i $u_t = u_{xx} + 2u$. Det gir

$$X(x)\dot{T}(t) = X''(x)T(t) + 2X(x)T(t) \quad \text{det vil si} \quad X''(x)T(t) = X(x)\big(\dot{T}(t) - 2T(t)\big),$$

slik at

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{k} = \underbrace{\frac{\dot{T}(t) - 2T(t)}{T(t)}}_{k}.$$

Dette gir følgende to 2. ordens ordinære differensialligninger

$$X''(x) - kX(x) = 0, \tag{1}$$
$$\dot{T}(t) - (k+2)T(t) = 0. \tag{2}$$

Løser så (1), gitt randbetingelsene $u_x(0,t) = 0$ og $u_x(\pi,t) = 0$, det vil si $X'(0) = 0$ og $X'(\pi) = 0$. Med andre ord,

$$X''(x) - kX(x) = 0, \qquad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0. \tag{1'}$$

Vi har tre muligheter for k:

(i) $k = p^2 > 0$: Innsatt for $k = p^2$ i (1′) får vi

$$X''(x) - p^2X(x) = 0.$$

Denne ligningen har løsning

$$X(x) = Ae^{px} + Be^{-px}.$$

Ettersom

$$X'(x) = p\big(Ae^{px} - Be^{-px}\big),$$

gir $X'(0) = 0$ at $A = -B$. Fra $X'(\pi) = 0$ får vi

$$X'(\pi) = Ap(e^{p\pi} - e^{-p\pi}) = 2Ap\sinh p\pi = 0.$$

Altså må $A = 0$. Dermed står vi kun igjen med den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$. Altså er $k \le 0$.

(ii) $k = 0$: Innsatt for $k = 0$ i (1′) får vi

$$X''(x) = 0,$$

som har løsning $X(x) = Ax + B$. Fra $X'(0) = 0$ og $X'(\pi) = 0$ får vi $A = 0$. Altså står vi igjen med løsningen $X(x) = $ konstant.

(iii) $k = -p^2 < 0$: Innsatt for $k = -p^2$ i $(1')$ får vi

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0,$$

som har løsning

$$X(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Ettersom

$$X'(x) = p\big(B\cos px - A\sin px\big),$$

får vi at $X'(0) = Bp = 0$, det vil si $B = 0$. Altså har vi at $X(x) = A\cos px$. Fra $X'(\pi) = 0$, får vi

$$X'(\pi) = -pA\sin p\pi = 0.$$

Ettersom $A = 0$ kun gir den trivelle løsningen $u(x,t) = 0$, ser vi på tilfellet der $\sin p\pi = 0$. Det gir $p = n = 1, 2, 3, \ldots$. Altså er $k = -n^2$.

Ved å kombinere (ii) og (iii) har vi funnet at alle mulige løsninger for $(1')$, gitt våre randbetingelser, er på formen

$$X_n(x) = \tilde{A}_n \cos nx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Setter så inn for $k = -n^2$ i (2). Det gir

$$\dot{T}(t) + (n^2 - 2)T(t) = 0 \quad \text{det vil si} \quad \dot{T}(t) = (2 - n^2)T(t),$$

som har løsning

$$T_n(t) = C_n e^{(2-n^2)t}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Altså er alle løsninger på formen $u(x,t) = X(x)T(t)$, som tilfredstiller $u_t = u_{xx} + 2u$ og de gitte randbetingelsene, gitt ved

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{(2-n^2)t}\cos nx.$$

b) Legg merke til at $\cos^2 x = \frac{1}{2}\big(1 + \cos 2x\big)$, slik at

$$u(x,0) = (\cos x + 1)^2 = \cos^2 x + 2\cos x + 1 = \frac{3}{2} + 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

De løsningene vi fant i oppgave **a)** som i tillegg tilfredstiller initialbetingelsen gitt over, er da gitt ved

$$u(x,t) = \frac{3}{2}e^{2t} + 2e^{t}\cos x + \frac{1}{2}e^{-2t}\cos 2x.$$

Oppgave 7 La $y_1 = y$ og $y_2 = y'$. Da blir ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(0) &= \pi/2, \\ y_2' &= \sin(y_2), & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Et skritt med trapesmetoden på denne ligningen er gitt ved

$$\begin{aligned} y_{1,n+1} &= y_{1,n} + \frac{h}{2}(y_{2,n} + y_{2,n+1}), \\ y_{2,n+1} &= y_{2,n} + \frac{h}{2}\big(\sin y_{1,n} + \sin y_{1,n+1}\big). \end{aligned}$$

Med $h = 0.1$, $n = 0$ og $y_{1,0} = \pi/2$, $y_{2,0} = 0$ blir dette

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{20} y_{2,1} & &\text{eller} & 20y_{1,1} - y_{2,1} - 10\pi &= 0 \\ y_{2,1} &= \frac{1}{20}\big(1 + \sin y_{1,1}\big) & & & \sin y_{1,1} - 20y_{2,1} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Oppgave 8 Her er

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20 & -1 \\ \cos(x_1) & -20 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 20x_1 - x_2 - 10\pi \\ \sin(x_1) - 20x_2 + 1 \end{bmatrix}$$

Med oppgitte startverdier blir $J(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$ til

$$\begin{bmatrix} 20 & -1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

med løsning $\Delta x_2 = 1/10 = 0.1$ og $\Delta x_1 = 1/200 = 0.005$. Dermed blir

$$x_1^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{200} = 1.5758, \qquad x_2^{(1)} = 0.1000.$$

Oppgave 9 Differanseskjemaet blir for $U_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$:

$$\frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{k} = \kappa \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + x_i(1 - x_i)$$

eller

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + \kappa \frac{k}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + kx_i(1 - x_i),$$

for $i = 1, 2, \ldots, N-1$, og $j = 0, 1, 2, \ldots$, og med

$$U_{i,0} = \sin(\pi x_i) = \sin(i\pi h), \qquad U_{0,j} = U_{N,j} = 0.$$

Med $\kappa = 0.1$, $h = 0.25$ og $k = 0.2$ blir dette ($x_i = 0.25i$)

$$U_{i,j+1} = U_{i,j} + 0.32(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 0.05i(1 - 0.25i).$$

Med startverdiene

$$
\begin{aligned}
&U_{0,0} = 0,\ U_{1,0} = \sin(\pi/4) = 0.70711,\ U_{2,0} = \sin(\pi/2) = 1,\\
&U_{3,0} = \sin(3\pi/4) = 0.70711,\ U_{4,0} = \sin(\pi) = 0
\end{aligned}
$$

ender vi med

$$
\begin{aligned}
u(0.25, 0.2) &\approx U_{1,1} = 0.6121,\\
u(0.5, 0.2) &\approx U_{2,1} = 0.8625,\\
u(0.75, 0.2) &\approx U_{3,1} = 0.6121.
\end{aligned}
$$