Matematikk 4 TMA4123M og TMA 4125N

20. Mai 2011

Løsningsforslag med utfyllende kommentarer

Oppgave 1

Funksjonen $f(x) = \sin x$, *definert på intervallet* $[0, \pi]$, *skal utvides til en odde funksjon,* g, *og en like funksjon,* h, *begge med periode* 2π.

(a) Skissér funksjonene g *og* h *på intervallet* $[-2\pi, 2\pi]$, *og angi, uten å regne, fourierrekken for* g.

(b) Vis at fourierrekken for h *kan skrives*

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2kx,$$

og bestem summen av rekkene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \text{ og } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2 - 1}.$$

(*Vink:* $\int_0^\pi \sin x \cos nx \mathrm{d}x = -\frac{2}{(n-1)(n+1)}$, $n = 2, 4, \cdots$; $= 0$, $n = 1, 3, \cdots$)

Løsning:

(a) Vi ser at utvidelsen av f til en odde, 2π-periodisk funksjon nettopp blir $\sin x$. Dermed blir fourierrekken for $g(x)$ ingenting annet enn $\sin x$.

Funksjonen $h(x)$ defineres på $[-\pi, 0]$ som $h(x) = \sin(-x) = |\sin x|$. Det siste uttrykket kan benyttes for alle x, med andre ord, $h(x) = |\sin x|$. Funksjonene er vist på Fig. 1.

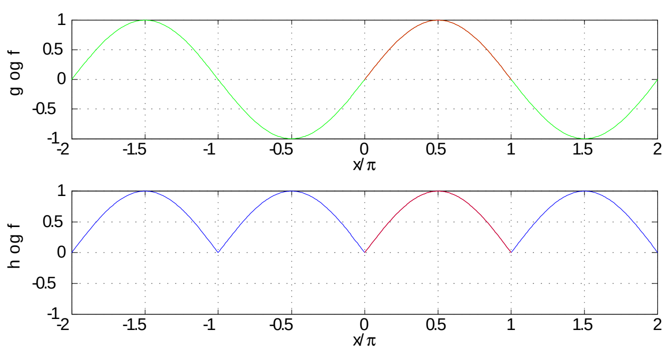

Figure 1: Funksjonen g og f (øverst), og h og f (nederst).

(b) Siden h er en like funksjon med periode 2π, blir det bare snakk om å finne cos-rekken. For a_0 får vi

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

På samme måte finner vi a_n for $n = 2, 4, \cdots$ ved bruk av den oppgitte formelen:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos nx \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \cos nx \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{2}{(n-1)(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Merk at a_n for $n = 1, 3, \cdots$ er oppgitt til å være lik 0, slik at

$$h(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} \cos nx = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 2kx.$$

For $x \in [0, \pi]$ er $h(x) = f(x) = \sin x$. For $x = 0$ finner vi spesielt

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} \cos 0,$$

og dermed

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

Denne summen kan alternativt finnes direkte uten bruk av fourierrekke ved å observere at $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$ og skrive

$$\sum_{n=2,4,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \right) = \frac{1}{2}.$$

For den andre summen ser vi først at

$$\cos 2k \left(\frac{\pi}{2} \right) = \cos k\pi = (-1)^k,$$

og kan dermed sette opp

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2 - 1} (-1)^k.$$

Følgelig blir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)^2 - 1} = -\frac{\pi - 2}{4} \approx -0.2854.$$

Oppgave 2

Det oppgis at fouriertransformen til funksjonen $\frac{\sin ax}{x}$ *(for* $a > 0$*) er* $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *hvis* $|\omega| < a$*, og* 0 *hvis* $a < |\omega|$.

(a) *Vis at*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi,$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x \; \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & a > 1, \\ \pi/2 & a = 1, \\ 0 & a < 1. \end{cases}$$

(b) *Et filter foretar en konvolusjon med funksjonen*

$$h_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin ax}{x}(a > 0)$$

på alle signaler (funksjoner) $f(x)$ *som kommer inn til filteret, og sender resultatet av konvolusjonen,* $g = h_a * f$*, ut.*

Forklar hva som har skjedd med fouriertransformen til signalet etter at det har passert filteret. (*Vink: Sjekk fouriertransformen til* h_a).

Løsning:

(a) Definisjon av fouriertransformen gir oss

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |\omega| < a, \\ 0, & a < |\omega| \end{cases} \tag{1}$$

Hvis vi setter $a = 1$ og $\omega = 0$, får vi

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

og følgelig blir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \pi.$$

For det neste integralet må vi benytte at $\frac{\sin ax}{x}$ er en *like* funksjon, og vi kan dermed forenkle FT ved å observere at

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} e^{-i\omega x} \mathrm{d}x &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} (\cos \omega x - i \sin \omega x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos \omega x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Hvis vi lar $\omega = 1$ vil, etter lign. 1,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cos x \mathrm{d}x = \sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} \pi, & 1 < a, \\ 0, & a < 1 \end{cases}$$

Det gjenstår å sjekke $a = 1$, men her observerer vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \cos x \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{1}{2} \mathrm{d}(2x) \overset{t=2x}{=} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Fra den oppgitte fouriertransformen ser vi at

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi}\frac{\sin ax}{x}\right) = \frac{1}{\pi} \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{for } |\omega| < a, \\ 0 & \text{for } |\omega| > a. \end{cases}$$

Dette betyr at FT til $g = h_a * f$ vil være

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{h}_a(\omega)\hat{f}(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega), & |\omega| < a, \\ 0, & a < |\omega|. \end{cases}$$

Filteret "kapper av" FT til signalet utenfor intervallet $[-a, a]$ (Dette kalles en *lavpassfiltrering* av signalet).

Legg merke til at alle funksjoner f der $\hat{f}(\omega)$ er null for $|\omega| \geq a$ går uforandret gjennom filteret. Vi kan også observere at

$$\lim_{a \to \infty} \hat{h}_a(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

for alle ω. En kan derfor si at grensen for h_a når $a \to \infty$ må være *deltafunksjonen*, $\delta(x)$, siden $\hat{\delta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ for alle ω.

Oppgave 3

(a) *Finn alle (ikke-trivielle) løsninger av differensialligningen*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 \leq t, \quad 0 \leq x \leq L, \tag{2}$$

på formen $G(t)F(x)$, der $G(0) = 1$, og $F(0) = F(L) = 0$.

(b) *En tynn stav ligger langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$. Temperaturen i staven, $u(x,t)$, tilfredsstiller samme ligning som i* **(a)**. *Temperaturen ved $x = 0$ er lik 0, mens temperaturen ved $x = L$ er lik T ($\neq 0$), dvs. $u(0,t) = 0$, $u(L,t) = T$, $0 \leq t$.*

Angi en enkel løsning for temperaturen i staven som er uavhengig av tiden.

Vi antar nå videre at staven for $t = 0$ har temperatur

$$u(x,0) = \frac{Tx}{L} + \sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L}.$$

Finn, ved å benytte resultatet i (a) eller en annen måte, temperaturen i staven for $0 \leq x \leq L$, $0 \leq t$.

Løsning

(a) Dette er et standard problem med separasjon av variable, der vi først fører inn G og F i ligningene,

$$F(x)G'(t) = F''(x)G(t),$$

og får

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k,$$

eller

$$G'(t) - kG(t) = 0, \quad G(0) = 1, \tag{3}$$
$$F''(x) - kF(x) = 0, \; F(0) = F(L) = 0. \tag{4}$$

Hvis $k > 0$, vil generell løsning av lign. 4 være

$$F(x) = A\cosh\left(\sqrt{k}x\right) + B\sinh\left(\sqrt{k}x\right).$$

Siden $F(0) = 0$ må $A = 0$, men $\sinh\left(\sqrt{k}x\right) \neq 0$ for alle $x \neq 0$, og dette fører til sinde $F(L) = 0$, at også $B = 0$, dvs. null-løsningen. Det samme gjelder for $k = 0$. Følgelig trenger vi $k < 0$ for å få akseptable løsninger forskjellig fra 0, og prøver da som vanlig $k = -p^2$. Generell løsning av lign. 4 blir

$$F(x) = A\cos px + B\sin px,$$

der A må være 0 siden $F(L) = 0$. Hvis vi også krever $F(L) = 0$, må i tillegg

$$\sin(pL) = 0.$$

Vi får dermed at mulige p-er og tilhørende funksjoner (egenverdier og egenfunksjoner) er

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n\pi}{L}, \\ F_n(x) &= \sin(p_n L) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

Ligningene for $G(t)$ blir

$$G'(t) + p_n^2 G(t) = 0, \; n = 1, 2, \cdots,$$

og med $G(0) = 1$, finner vi

$$G_n(t) = \exp\left(-p_n^2 t\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Alle ikke-trivielle løsninger på denne formen blir altså

$$C_n \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right) \sin\frac{n\pi x}{L}, \; n = 1, 2, \cdots,$$

der $\{C_n\}$ er vilkårlige konstanter.

(b) En tidsuavhengig (stasjonær) løsning $u_s(x)$ er uavhengig av t og må følgelig tilfredsstille ligningen

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}x^2} = 0,$$

dvs. $u_s(x) = A + Bx$. Betingelsene $u(0) = 0$ og $u(L) = T$ gir oss dermed at

$$u_s(x) = \frac{xT}{L}.$$

Generell løsning kan nå skrives på formen

$$u(x,t) = u_s(x) + v(x,t),$$

der $v(x,t)$ er en løsning av lign. 2 med $v(0,t) = v(L,t) = 0$, med andre ord, en kombinasjon av løsningene i (a). Siden den gitte startbetingelsen allerede inneholder u_s, blir startbetingelsen for $v(x,t)$ bare

$$v(x,0) = \sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{L},$$

og temperaturen i staven kan dermed leses direkte ut fra resultatet i (a) som

$$u(x,t) = T\frac{x}{L} + e^{-\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}e^{-\left(\frac{3\pi}{L}\right)^2 t}\sin\frac{3\pi x}{L}.$$

Som forventet vil

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T\frac{x}{L} = u_s(x).$$

Alternativt kan oppgaven løses ved å *tippe* at vi *kanskje* har en løsning på formen

$$u_s(x) + G_1(t)\sin\frac{\pi x}{L} + G_3(t)\sin\frac{3\pi x}{L},$$

og deretter enkelt finne G_1 og G_3 fra direkte innsetting i ligningen.

Oppgave 4 (for TMA4125N)

(a) *Vis at den inverse Laplace-transformen til*

$$Y(s) = \frac{7}{(s-3)^2} + \frac{s}{(s-3)^2}$$

er

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y)(t) = e^{3t} + 10te^{3t}.$$

(b) *Løs initsialverdiproblemet*

$$y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y'(0) = y(0) = 1.$$

Løsning:

(a) Vi har at $\mathcal{L}\left(e^{3t}\right) = F(s) = \frac{1}{s-3}$, samt at $\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s) = \frac{1}{(s-3)^2}$. Dermed blir

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{7}{(s-3)^2}\right)(t) = 7te^{3t}.$$

Videre kan vi benytte derivasjonsregelen, $sF(s) = \mathcal{L}(f') + f(0)$. Med $F(s) = \frac{1}{(s-3)^2}$ og $f(t) = te^{3t}$ finner vi

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(s\frac{1}{(s-3)^2}\right)(t) = \frac{d\left(te^{3t}\right)}{dt} + 0 = e^{3t}(3t+1).$$

Tilslutt får vi

$$y(t) = f(t) + g(t) = 7te^{3t} + e^{3t}(3t+1) = e^{3t} + 10te^{3t}.$$

Alternativt kan vi også finne y ved å observere at

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{7}{(s-3)^2} + \frac{s}{(s-3)^2} = 10\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{s-3}{(s-3)^2} \\ &= 10\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{s-3}, \end{aligned}$$

og dermed,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(10\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{s-3}\right)(t) = 10te^{3t} + e^{3t}.$$

(b) Vi starter med å laplacetransformere ligningen og føre inn startbetingelsene:

$$\mathcal{L}\left(y'' - 6y' + 9y\right)(s) = \left(s^2Y(s) - s - 1\right) - 6(sY(s) - 1) + 9Y(s) = 0.$$

Dermed finner vi etter opprydding

$$Y(s) = \frac{s-5}{s^2 - 6s + 9} = \frac{s-5}{(s-3)^2}.$$

Delbrøkoppspaltningen gir oss

$$\frac{A}{s-3} + \frac{B}{(s-3)^2} = \frac{A(s-3) + B}{(s-3)^2} = \frac{s-5}{(s-3)^2},$$

og dermed $A = 1$ og $B = -2$. Ved hjelp fra (a) gir dette

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3} - \frac{2}{(s-3)^2}\right)(t) = e^{3t} - 2te^{3t},$$

som også stemmer ved innsetting i ligningen og startbetingelsene.

Oppgave 5 for TMA4125, 4 for TMA4123

(a) *Finn interpolasjonspolynomet av lavest mulig grad som går gjennom (x, y)-punktene*

$$(0,1)\,,(1,2)\,,(2,5)\,.$$

(b) *Vis hvordan en ved hjelp av polynomet i (a) og et Lagrange interpolasjonspolynom som er 0 i $x = 0, 1, 2$, og 1 i $x = 3$, kan lage et polynom som i tillegg til punktene i* (a) *også går gjennom punktet* $(3, 16)$.

Løsning

(a) Vi har gitt tre punkter, og generelt vil da polynomet være en parabel, $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. De oppgitte punktene gir oss systemet

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 0 + a_2 0 &= 1, \\ a_0 + a_1 1 + a_2 1 &= 2, \\ a_0 + a_1 2 + a_2 4 &= 5, \end{aligned}$$

som umiddelbart gir oss $a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 1$, med andre ord, $p_2(x) = 1 + x^2$ (Kan alternativt løses med Lagrange-interpolasjon eller ses direkte).

(b) Lagrangepolynomet som er 0 i $x = 0, 1, 2$ og 1 i $x = 3$, er

$$L(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3(3-1)(3-2)} = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)\,.$$

Vi kan kombinere p_2 og L_4 til et nytt polynom, $p_3(x)$, som har verdien 16 for $x = 3$. Alle polynomer på formen

$$p_2(x) + cL(x)\,,\ c \in \mathbb{R},$$

går gjennom punktene gitt i (a). Av disse vil spesielt

$$p_3(x) = p_2(x) + (16 - p_2(3))\,L(x)$$

også gå gjennom $(3, 16)$. Hvis vi setter inn for p_2 og L, får vi

$$p_3(x) = 1 + x^2 + (16-1-9)\,\frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = 1 + 2x - 2x^2 + x^3.$$

Oppgave 6 TMA4125, Oppgave 5 TMA4123

Midt inne i en rett, massiv murvegg vil temperaturen være $\frac{T_1+T_2}{2}$, der T_1 er temperaturen på utsiden og T_2 temperaturen på innsiden av veggen. Men hva blir temperaturen midt inne i veggen i et rett hjørne? For å finne ut mer, har vi konstruert testproblemet skissert på figur 1.

Temperaturen på alle sidenodene er som angitt, mens den er ukjent i de indre nodene. Hva kan vi si om u_{ij} og u_{ji} for de indre nodene? Bestem, ved å bruke fem-punktsapproksimasjonen for $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, temperaturene u_{11}, u_{21} og u_{31}.

Løsning

Det er klart at problemet er symmetrisk, slik at for de angitte indre nodene vil $u_{12} = u_{21}$ og $u_{13} = u_{31}$. Dermed kan vi sette $u_{11} = X$, $u_{21} = u_{12} = Y$, og $u_{31} = u_{13} = Z$. Fempunktsapproksimasjonen, som her kan skrives

$$\nabla^2(u_c) \approx \frac{u_V + u_N + u_ø + u_S - 4u_c}{h^2} = 0,$$

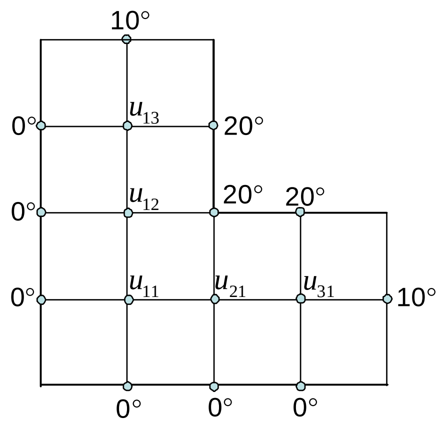

Figure 2: Numerisk nett for et utsnitt av hjørnet.

gir oss skjemaet

$$4u_c = u_V + u_N + u_ø + u_S,$$

og følgende tre ligninger

$$\begin{aligned} 4X &= 2Y, \\ 4Y &= X + 20 + Z + 0, \\ 4Z &= Y + 20 + 10 + 0, \end{aligned}$$

med løsning

$$\begin{aligned} X = u_{11} &= \frac{55}{13} \approx 4.23, \\ Y = u_{21} &= \frac{110}{13} \approx 8.46, \\ Z = u_{31} &= \frac{125}{13} \approx 9.62. \end{aligned}$$

Oppgave 6 for TMA4123

(a) *Vi har definert følgende variable i Matlab:*

`A`: 2×3 *matrise*,

`B`: 3×5 *matrise*,

`b`: 3×1 *kolonnevektor*,

`c`: 1×3 *radvektor*.

Angi med Ja/Nei og en kort kommentar hvilke operasjoner som er lovlige i Matlab:

(1) `A*B`, (2) `A.*B`, (3) `B'*A'`, (4) `A*b`, (5) `c*b`, (6) `b*c`, (7) `b.*c'`, (8) `A.^2`, (9) `cos(A)`, (10) `A(2,:)*c`.

(b) *Forklar Matlab-skriptet og funksjonen som er gitt i figur* 3.

Løsning

(a) I Matlab har vi at

```
x  = -4;                          %1
S  = 0;                           %2
for  j = 1:10                     %3
  x0 = x;                         %4
  [g,dg] = fdf(x);                %5
  x = x0 - g/dg;                  %6
  if abs(x-x0) < 1.0e-10          %7
    S = 1;                        %8
    'Solution:' , x , j           %9
    break                         %10
  end                             %11
end                               %12
if S == 0                         %13
  'No acceptable solution'        %14
end                               %15

function [f,df] = fdf(x)          %16
f =  2 - 3*x + 2*x^2 + x^3;       %17
df=     -3   + 4*x   + 3*x^2;     %18
```

Figure 3: Matlab-kode.

- alle lovlige matriseoperasjoner er akseptable for ”$*$”.
- elementvise operasjoner (for eksempel ”.$*$” og ”.ˆ”) krever *samme form* på begge sider.

Dermed blir:

1. JA (Vanlig matriseprodukt)
2. Nei (Ulik form)
3. JA (Vanlig matriseprodukt, $(A * B)' = B' * A'$)
4. JA (Matrise mult. med passende kolonnevektor)
5. JA (Skalarprodukt)
6. JA (3×3-matrise!)
7. JA (Elementvis produkt)
8. JA (Elementvis 2.potens)
9. JA (Matrisen $\{\cos a_{ij}\}$)
10. NEI (Både $A(2,:)$ og c er 3×1)

(b) Koden beregner en løsning av 3. gradsligningen $f(x) = 2 - 3x + 2x^2 + x^3 = 0$ vha. Newton-Raphsons metode. Iterasjonen stopper etter 10 iterasjoner, eller når forskjellen mellom to iterasjonsverdier er mindre enn 10^{-10}. Forklaring på koden:

```
x = -4; % Startverdi
S = 0; % Nullstiller indikator for iterasjonen
for j = 1:10 % Start på iterasjonsløkke.
    x0 = x; % Tar vare på gammel verdi
    [g,dg] = fdf(x); % Kaller ekstern funksjon for f(x) og f'(x)
    x = x - g/dg; % Newton-iterasjon
    if abs(x-x0) < 1.0e-10    % Sjekker endringen i løsningen
       S = 1; % Setter indikator for akseptabel løsning
       'Solution:'  , x , j    % Skriver ut løsningen
       break % Stopper loopen
    end    % Slutt if-statement
end     % Slutt loop
if S == 0 % Sjekker indikator
    'No acceptable solution'    %
end     %
function [f,df] = fdf(x)    % Matlab-funksjon for f(x) og f'(x)
f = 2 - 3*x +2*x^2+x^3;     % Funksjon
df= -3 +4*x + 3*x^2;    % Derivert
```