Ordinære linære differensialligninger

I dette lille notatet skal vi først behandle teorien for ordiænre linære differensialligninger av vilkårlig orden, siden spesialiserer vi til førstordens ligninger, og til slutt til andreordens ligninger med konstante koeffisienter.

Den generelle n-te ordens *homogene* ligningen er en ligning av formen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{1}$$

Vi vil anta at alle funksjonene $a_j(x)$ er definert i et intervall $x \in \langle b_1, b_2 \rangle$, og at de er kontinuerlige der. En løsning av (1) er en n ganger deriverbar funksjon $y = y(x)$, definert på det samme intervallet $\langle b_1, b_2 \rangle$, og som tilfredsstiller (1). Vi kan også sette en vilkårlig n ganger deriverbar funksjon $y = y(x)$ inn i (1), men da forsvinner ikke nødvendigvis høyresiden. Høyresiden blir da en funksjon $q = q(x)$, og vi sier at y er en løsning av den *inhomogene* ligningen

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x). \tag{2}$$

Av og til kan det være bekvemt å innføre begrepet *lineær differensialoperator*. En lineær differensialoperator L er et uttrykk av formen

$$L = \frac{d}{dx}^{n} + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx}^{n-1} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{3}$$

Ligning (2) kan da skrives på den meget enkle måten $Ly = q$.

Eksempel 1 Dersom $L = \frac{d}{dx} + 2$, og $y = xe^{-2x}$, så er y en løsning av den innhomogene første ordens lineære differensialligningen $Ly = y' + 2y = q$, der $q = e^{-2x}$.

Eksempel 2 Dersom $L = \frac{d}{dx}^2 + 2\frac{d}{dx} + 4$, og $y = xe^{-x}\cos\sqrt{3}x$, så er y en løsning av den innhomogene førsteordens lineære differensialligningen $Ly = q$, der $q = e^{-x}(-3\cos\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)$.

det første vi skal ta for oss i teorien er et prinsipp som gjelder for homogene lineære differensialligninger, og som gjør at lineære ligninger er spesielt enkle å løse.

Superposisjonsprinsippet

Dersom funksjonene y_1 og y_2 er løsninger av (1), c_1 og c_2 konstanter, så er funksjonen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ også løsning av (1).

Superposisjonsprinsippet følger umiddelbart fra lineæritetsegenskapen.

Lineæritet

Dersom y_1 og y_2 er funksjoner som tilfredsstiller henholdsvis de inhomogene ligningene $Ly = q_1$ og $Ly = q_2$, og c_1 og c_2 er konstanter, så vil funksjonen $y = c_1y_1 + c_2y_2$ tilfredsstille ligningen $Ly = c_1q_1 + c_2q_2$.

Eksempel 3 Dersom $L = \frac{d}{dx}^2 + 1$, $y_1 = 1$ og $y_2 = x \cos x$, så er y_1 løsning av ligningen $Ly = 1$, og y_2 løsning av ligningen $Ly = -2 \sin x$. Følgelig er $y = y_1 + y_2$ løsning av ligningen $Ly = 1 - 2 \sin x$.

Fundamentalteorem 1 *Løsningene til den n-te ordens homogene ligningen (1), $Ly = 0$, danner et vektorrom av dimensjon n. Dette betyr at det finnes n lineært uavhengige løsninger $y_1, y_2, \ldots, y_n$ av (1) og at dersom y er en vilkårlig løsning av (1), så finnes det entydig bestemte konstanter $c_1, c_2, \ldots, c_n$, slik at $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$.*

Eksempel 4 Enhver løsning av ligningen $y'' + y = 0$ er av formen $y = a \cos x + b \sin x$.

Korollar 1 *Anta at $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er lineært uavhengige løsninger av (1) og at y_p er en løsning av den inhomogene ligningen (2), $Ly = q$, og at y er en vilkårlig løsning av (2). Da finnes det entydig bestemte konstanter $c_1, c_2, \ldots, c_n$, slik at $y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$.*

Bevis Av lineæritet har vi at $L(y - y_p) = 0$, og korollaret følger direkte fra fundamentalteorem 1. □

Eksempel 5 Enhver løsning av ligningen $y'' + y = 1$ er av formen $y = 1 + a \cos x + b \sin x$.

Fundamentalteorem 2 *La $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ være vilkårlige tall, og la x_0 være et tall i intervallet $\langle a, b\rangle$. Da finnes det én og kun én løsning av y av (2), slik at $y(x_0) = b_0$, $y'(x_0) = b_1, \ldots$ og $y^{(n-1)}(x_0) = b_{n-1}$.*

Bevis Dette følger av det faktum at Wronskideterminanten til et fundamentalt set av løsninger $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x)$ aldri er null, og fra den elementære teorien for vanlige lineære ligninger. Den interesserte leser klarer kanskje å vise at Wronskideterminanten W er løsning av den første odens lineære ligningen $W' + a_{n-1}W = 0$, så dersom W hadde vært null i et punkt ville den vært noll overalt. □

Eksempel 6 La oss finne løsningen av ligningen $y'' + y = 1$, med $y(\frac{\pi}{4}) = -1$ og $y'(\frac{\pi}{4}) = 2$.

Vi vet at y er av formen $y = 1 + a \cos x + b \sin x$, og ved å derivere finner vi $y' = a - \sin x + b \cos x$. Evaluering i $\frac{\pi}{4}$ gir oss to lineære ligninger for a og b. På matriseform blir ligningen

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Vi finner $a = -2\sqrt{2}$ og $b = 0$, så løsningen blir $y = 1 - 2\sqrt{2} \cos x$.

Wronskideterminanten til n funksjoner $y_1, y_2, \ldots, y_n$ er determinanten

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$