Kort oversikt over hovedresultatene i kapittel 11

For å slippe å gjenta oss selv skal vi for enkelhets skyld, når vi sier funksjon, alltid mene en funksjon, definert for alle reelle tall, som tilfredsstiller følgende tre egenskaper. Se Kreyszig for presise definisjoner.

(i) Den skal være *stykkevis kontinuerlig*.

(ii) Den skal ha både *høyre* og *venstre deriverte* i hvert punkt.

(iii) Verdien i ethvert punkt skal være middelverdien av grenseverdien fra høyre og fra venstre, eller i matematisk språkdrakt

$$\forall x, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+0) + f(x-0)\Big).$$

1 Periodiske funksjoner

Teorem Enhver periodisk funksjon f med periode $2L > 0$ kan skrives entydig som en trigonometrisk rekke. Rekken kalles *Fourierrekken* til f

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right),$$

eller på kompleks form

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x} + c_{-n}e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}.$$

Koeffisientene a_n, b_n og c_n kalles Fourierkoeffisientene til f. Disse koeffisientene er gitt ved Eulers formler som bestemte integral

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx, \qquad \text{og for } n \neq 0 \text{ er} \qquad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx.$$

Tar vi realdel og imaginærdel hver for seg, har vi for $n \geq 1$

$$c_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx - i\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx\right] = \frac{1}{2}\left[a_n - ib_n\right],$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\left[a_n + ib_n\right].$$

Følgende ekvivalenser er er verdt å merke seg.

f er en *likefunksjon*	$\Leftrightarrow$	$\forall n\ b_n = 0$	$\Leftrightarrow$	$\forall n\ c_n = c_{-n}$
f er en *oddefunksjon*	$\Leftrightarrow$	$\forall n\ a_n = 0$	$\Leftrightarrow$	$\forall n\ c_n = -c_{-n}$

Kvadratdistansen mellom to periodiske funksjoner f og g med samme periode $2L$ er tallet $\|f-g\|$, definert ved at kvadratet $\|f-g\|^2$ er integralet over en periode av kvadratet av tallverdien av differansen mellom de to funksjonene

$$\|f-g\|^2 = \int_{-L}^{L} |f(x)-g(x)|^2 dx.$$

Vi har følgende resultat om tilnærming av periodiske funksjoner med trigonometriske polynomer.

La f være periodisk med periode $2L$ og Fourierkoeffisienter a_n og b_n. Sett

$$P_N = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right).$$

Vi vil kalle P_N det N-te Fourierpolynomet assosiert med f.

Teorem For ethvert trigonometrisk polynom Q av grad $\leq N$, og periode $2L$ er

$$\|f-P_N\| \leq \|f-Q\| \quad \text{og} \quad \|f-P_N\|^2 = \|f\|^2 - L\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

Dessuten gjelder Parsevals identitet

$$\|f\|^2 = L\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\right].$$

2 Ikkeperiodiske funksjoner

Teorem Enhver funksjon f med $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ kan representeres entydig som et integral av trigonometriske funksjoner

$$f(x) = \int_0^{\infty} \left(A(w)\cos wx + B(w)\sin wx\right) dw.$$

Dette integralet kalles *Fourierintegralet* til f, og funksjonene $A(w)$ og $B(w)$ er gitt ved integralene

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx dx, \quad \text{og} \quad B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx dx.$$

Merk at $A(w)$ er en likefunksjon og $B(w)$ er en oddefunksjon. Fourierintegralet kan skrives mer elegant på kompleks form. Da blir det seende slik ut

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} dw.$$

Funksjonen $\hat{f}(w)$ kalles *Fouriertransformen* til f og er gitt ved

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dw. \qquad \text{Merk fortegnet.}$$

Leseren kan selv sjekke ved å dele opp dette siste integralet i realdel og imaginærdel at vi har

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(A(w) - iB(w) \right).$$

Følgende ekvivalenser er er verdt å merke seg.

f er en likefunksjon	$\Leftrightarrow$	$B(w) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\hat{f}$ er en likefunksjon.
f er en oddefunksjon	$\Leftrightarrow$	$A(w) = 0$	$\Leftrightarrow$	$\hat{f}$ er en oddefunksjon.

For Fouriertransformasjonen gjelder følgende regler, her i tabellform.

$f(x)$	$\hat{f}(w)$
$e^{iax} f(x)$	$\hat{f}(w-a)$
$f(x-a)$	$e^{-iaw} \hat{f}(w)$
$\frac{d}{dx} f(x)$	$iw\hat{f}(w)$
$-ixf(x)$	$\frac{d}{dw} \hat{f}(w)$
$f(ax)$	$\frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$(f * g)(x)$	$\sqrt{2\pi} \hat{f}(w) \hat{g}(w)$

Hvor $(f * g)(x)$ betegner *konvolusjonsproduktet* $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du$.

I tillegg har vi for $a > 0$,

e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{1}{4a} w^2}$

Analogen til Parsevals teorem er at Fouriertransformasjonen bevarer kvadratnormen.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(w)|^2 dw.$$