Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN TMA4135 MATEMATIKK 4D, 30.11.2005

Løsning av oppgave 1 Setter vi $Y = \mathcal{L}(y)$ og transformerer, får vi ligningen

$$sY - 1 + Y + \frac{Y}{s-1} = \frac{e^{-s}}{s}$$

Med litt regning gir dette

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right)$$

Ved å transformere tilbake får vi ved hjelp av 2. skifteteorem at

$$y(t) = 1 - t - \frac{1}{2}u(t-1)\left(t^2 - 4t + 3\right).$$

Løsning av oppgave 2 La S_1 og S_2 betegne summene av de gitte rekkene, henholdsvis.

Fra konvergensteoremet for Fourierrekker har vi (siden f er kontinuerlig overalt)

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4}\cos nx \quad \text{for} \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Sett $x = \pi$ og bruk at $\cos n\pi = (-1)^n$. Det gir

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} + 8S_1 \implies S_1 = \frac{1 - 1/5}{8}\pi^4 = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{10}}}.$$

Parsevals identitet

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx$$

gir i vårt tilfelle

$$2\left(\frac{\pi^4}{5}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^8\,dx$$

dvs.

$$\frac{2\pi^8}{25} + 64S_2 = \frac{2\pi^8}{9} \implies S_2 = \frac{2\pi^8}{64}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^8}{450}}}.$$

Løsning av oppgave 3

Punkt (a)

Ligningen gir

$$F(x)[G''(t) + G'(t)] = F''(x)G(t) \implies \frac{G''(t) + G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

der k må være konstant. Følgelig har vi

$$F''(x) = kF(x), \tag{1}$$
$$G''(t) + G'(t) = kG(t). \tag{2}$$

Randbetingelsen gir

$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{3}$$

Vi løser først randverdiproblemet (1), (3). Det er tre muligheter:

1. $k > 0$. Da skriver vi $k = \mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, men (3) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k > 0$.
2. $k = 0$. Gir generell løsning $F(x) = Ax + B$, men (3) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k = 0$.
3. $k < 0$. Da skriver vi $k = -\mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, men (3) gir $A = 0$ og $B\sin\mu\pi = 0$. Derfor må $\mu = n$, der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi konkluderer at $F(x) = F_n(x) = B_n \sin nx$, svarende til $k = -n^2$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nå løser vi (2) med $k = -n^2$, dvs.

$$G''(t) + G'(t) + n^2 G(t) = 0$$

Kar. lign. er $\lambda^2 + \lambda + n^2 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + n^2 - \frac{1}{4} = 0$, som har røtter

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

Derfor er

$$G(t) = G_n(t) = e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right)$$

og vi konkluderer:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{\underline{e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right) B_n \sin nx}}$$

men vi kan sette $B_n = 1$ (vi har allerede to vilkårlige konstanter C_n og D_n, så B_n kan "bakes inn" der).

Punkt (b)

Her er det bare $u(x,t) = u_4(x,t)$ som kan komme i betraktning. Vi har fra svaret på forrige punkt (med $B_n = 1$),

$$u(x,0) = C_4 \sin 4x \underbrace{= 0}_{\text{fra initialbet.}} \implies C_4 = 0.$$

Vi står derfor igjen med

$$u(x,t) = e^{-t/2} D_4 \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x$$

Men da er

$$u_t(x,t) = -\frac{1}{2} e^{-t/2} D_4 \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x + e^{-t/2} D_4 \frac{\sqrt{63}}{2} \cos \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x$$

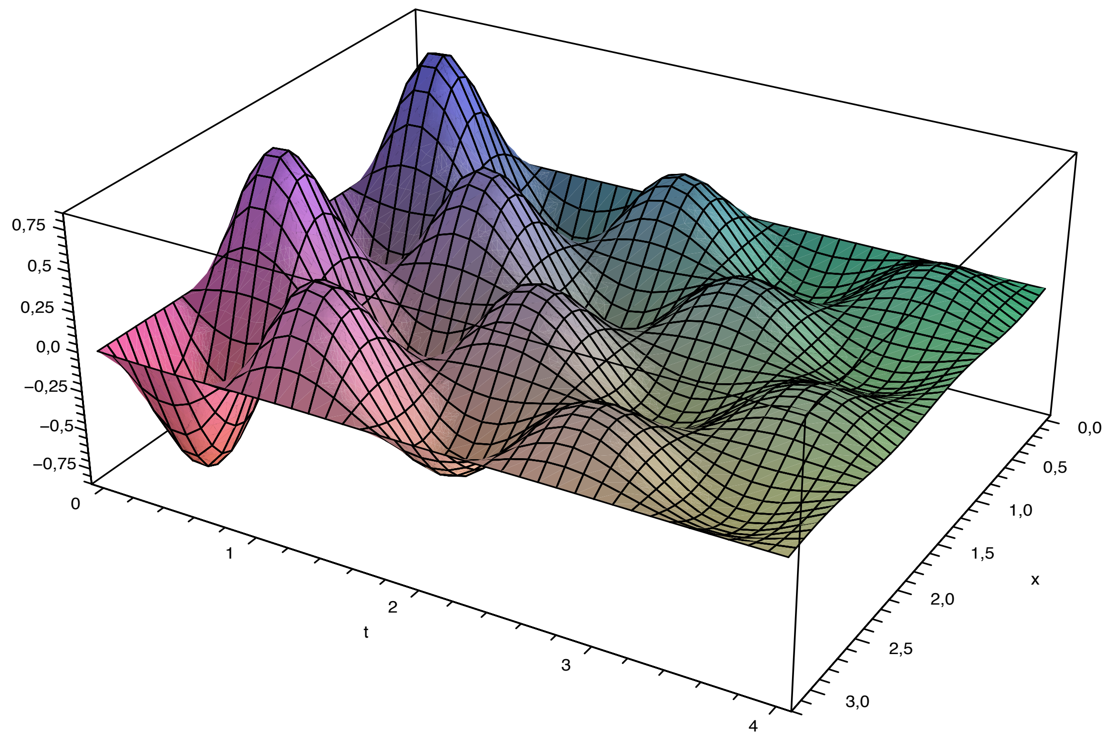
og innsatt $t = 0$:

$$u_t(x,0) = D_4 \frac{\sqrt{63}}{2} \sin 4x \underbrace{= \sin 4x}_{\text{fra initialbet.}} \implies D_4 = \frac{2}{\sqrt{63}}.$$

Svaret er altså

$$u(x,t) = \underline{\underline{e^{-t/2} \frac{2}{\sqrt{63}} \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x.}}$$

Her et plot av løsningen:



Løsning av oppgave 4

Vi har (se s. 176 i Rottmann for def.)

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos wx\, dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \sin wx\, dx}_{= 0 \text{ pga. odde funksjon i } x} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-|x|} \cos wx\, dx \qquad \text{(integranden er like funksjon av } x\text{)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos wx\, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \qquad \text{(Rottmann s. 144, nr. 133).}
\end{aligned}
$$

Men $x = \infty$ gir ikke noe bidrag, siden $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cos wx = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \sin wx = 0$. Får derfor

$$
\widehat{f}(w) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+w^2}}}.
$$

Fra inversjonsformelen har vi

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx}\, dw
$$

dvs.

$$
\begin{aligned}
e^{-|x|} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{1+w^2}\, dw \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw + \frac{i}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wx}{1+w^2}\, dw}_{= 0 \text{ pga. odde funksjon av } w} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw \qquad \text{(integranden er like funksjon av } w\text{)}
\end{aligned}
$$

og ved å sette $x = 1$ får vi da:

$$
\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw = \frac{\pi}{2e}
$$

som skulle vises.

Løsning av oppgave 5

Vi bruker tilnærmelsene

$$u_{xx}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

og

$$u_{yy}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) \; .$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{21}) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{12}) &= -1 \\
\frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{21} + 1) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{21} + 1) &= -1 \\
\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{12} + 1) + \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{12} + 1) &= -1 \; .
\end{aligned}$$

Setter inn $h = 1/4$ og får ligningene

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -33/16 = -2.0625 \\
u_{11} - 4u_{21} &= -49/16 = -3.0625 \\
u_{11} - 4u_{12} &= -49/16 = -3.0625 \; .
\end{aligned}$$

Disse har løsningene

$$u_{11} = 115/112 = 1.0268, u_{12} = u_{21} = 229/224 = 1.0223$$

Løsning av oppgave 6

Systemet kan ikke løses ved hjelp av Jacobi-iterasjoner slik det står, siden koeffisienten $a_{33} = 0$.

Men ved å sette den siste ligningen først får vi:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
4x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\
4x_1 & - & 16x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \; . \\
 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 4
\end{array}$$

Ikke bare kan Jacobi-iterasjonene utføres, men dette systemet er også diagonal-dominant, og vi kan være sikre på at iterasjonene konvergerer.

En iterasjon gir:

$$\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(2 + x_2^{(0)}\right) &= \frac{3}{4} = 0.750 \\
x_2^{(1)} &= -\frac{1}{16}\left(2 - 4x_1^{(0)} - 4x_3^{(0)}\right) &= \frac{3}{8} = 0.375 \\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{4}\left(4 + x_1^{(0)}\right) &= \frac{5}{4} = 1.250.
\end{aligned}$$

Løsning av oppgave 7

Ved å sette $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ får vi systemet:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -(2y_1 + y_1^3 + 0.5y_2). \end{aligned}$$

Når dette skal løses med Heuns metode, lønner det seg å skrive systemet på vektorform. Med $y_1(0) = y(0) = 1$ og $y_2(0) = y'(0) = 0$ blir det

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -(2y_1 + y_1^3 + 0.5y_2) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Første skritt med Heuns metode med $h = 0.1$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0) = 0.1 \begin{bmatrix} 0 \\ -(2 \cdot 1 + 1^3 + 0.5 \cdot 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1 &= \begin{bmatrix} 1.0 \\ -0.3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1) = 0.1 \begin{bmatrix} -0.3 \\ -(2 \cdot 1 + 1^3 + 0.5 \cdot (-0.3)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.285 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og til slutt

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.9850 \\ -0.2925 \end{bmatrix}$$

Andre skritt:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_1) = 0.1 \begin{bmatrix} -0.2925 \\ -(2 \cdot 0.9850 + 0.9850^3 + 0.5 \cdot (-0.2925)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0293 \\ -0.2779 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_1 + \mathbf{k}_1 &= \begin{bmatrix} 0.9558 \\ -0.5704 \end{bmatrix} \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{k}_1) = 0.1 \begin{bmatrix} -0.5794 \\ -(2 \cdot 0.9558 + 0.9558^3 + 0.5 \cdot (-0.5704)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0570 \\ -0.2499 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og til slutt

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.9419 \\ -0.5564 \end{bmatrix}$$

Så $y(0.1) \approx 0.9850$ og $y(0.2) \approx 0.9419$.

Løsning av oppgave 8 Vi regner først ut gradienten.

$\text{grad} f =$
$[2yz(e^x + e^y - e^z) + 2xyze^x]\mathbf{i} + [2xz(e^x + e^y - e^z) + 2xyze^y]\mathbf{j} + [2xy(e^x + e^y - e^z) - 2xyze^z]\mathbf{k}.$

Evaluering i punktet $P : (1, -1, -1)$ gir oss

$$\text{grad} f|_P = 4e\mathbf{i} + (-2e + 2e^{-1})\mathbf{j} + (-2e - 2e^{-1})\mathbf{k}.$$

Enhetsvektoren vinkelrett både på $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ og som har negativ $\mathbf{k}$-komponent er $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Vi finner at den retningsderiverte er

$$D_{\mathbf{e}} f|_P = \frac{8e}{\sqrt{3}}.$$