**Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for matematiske fag**



Faglig kontakt under eksamen:
Xavier Raynaud: tlf. 73 59 35 46

# EKSAMEN I MATEMATIKK 4D (TMA4135)

Bokmål
Onsdag 13. desember 2006
kl. 9–13

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator(HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensurdato: 12.01.2007

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

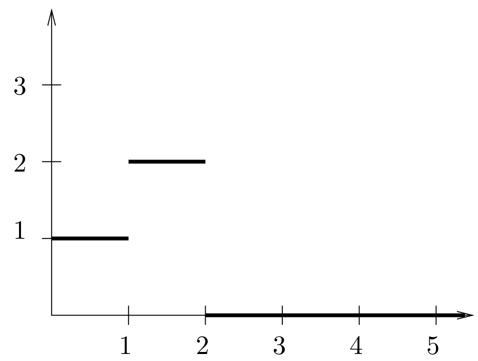
## Oppgave 1

**a)** Finn $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+s-2)}\right)$, $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s(s^2+s-2)}\right)$ og $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s(s^2+s-2)}\right)$

**b)** Løs

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = r(t)$$

med $y(0) = y'(0) = 1$ og der $r$ er gitt ved den følgende grafen



**Oppgave 2** Finn den Fouriertransformerte til funksjonen $h(x) = (e^{-x^2} * e^{-x^2})$.

Bruk resultatet til å finne et uttrykk for $h(x)$ uten integraltegn og $*$.

Du kan få bruk for formelen $\mathcal{F}(e^{-ax^2}) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\, e^{-w^2/4a}$.

**Oppgave 3** Gitt to randverdiproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0,\ x \in (0,1), \\ u(0,t) = a, & t > 0, \\ u(1,t) = b, & t > 0, \end{cases}$$

der $a, b \in \mathbb{R}$, og

$$(**) \qquad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & t > 0,\ x \in (0,1), \\ v(0,t) = 0, & t > 0, \\ v(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Vi minner om at et randverdiproblem består av en differensialligning *med* randbetingelse.

**a)** Hvis $u_1$ og $u_2$ begge løser randverdiproblemet (*)(det vil si, hvis både $u_1$ og $u_2$ er løsninger av (*)), hvilke randverdiproblemer løser da henholdsvis $u_1 + u_2$ og $u_1 - u_2$? Holder superposisjonsprinsippet for randverdiproblemene (*) og (**)?

**b)** La $u(x,t)$ være en løsning av randverdiproblemet (*) og la $v(x,t)$ være definert ved

$$v(x,t) = u(x,t) - [a + (b-a)x].$$

Vis at $v(x,t)$ løser randverdiproblemet (**).

Bestem alle løsninger av (**) på formen

$$v(x,t) = F(x)G(t).$$

**c)** La $a = -1$ og $b = 1$ i (*). Finn løsningen $u(x,t)$ av initial/randverdiproblemet gitt ved (*) og initialkravet

$$(***) \qquad u(x,0) = \sin(\pi x),\ x \in (0,1).$$

**Oppgave 4**

**a)** Finn polynomet $p(t)$ med lavest mulig grad som interpolerer

| $t_n$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p(t_n)$ | 12 | 0 | 0 | 6 | 12 |

**b)** Bruk Simpsons regel til å regne ut

$$\int_{-2}^{2} p(t)dt$$

med knuter (nodes) i punktene -2,-1,0,1,2.

Sammenlikn svaret med den eksakte verdien av integralet og forklar det du ser.

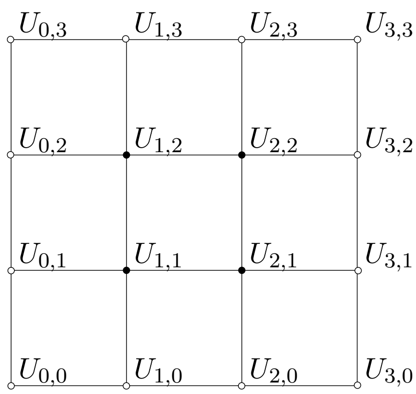
**Oppgave 5** I et anisotropt materiale der varmekonduktivitet i $y$-retningen er to ganger høyere enn i $x$-retningen tar den stajonære varmeligningen formen

$$u_{xx} + 2u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Vi vil løse (1) numerisk. Området er et kvadrat med sidelengde 1 og randbetingelser er gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,0) = u(0,y) = 0 \\ u(x,1) = u(1,y) = 1 \end{aligned}$$

for $x, y$ i $[0,1]$. Vi betrakter det følgende gitteret




der $h = \frac{1}{3}$ og $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$.

**a)** Vis at differenseskjemaet som tilsvarer (1) er

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + 2U_{i,j+1} + 2U_{i,j-1} - 6U_{i,j} = 0.$$

**b)** Sett opp systemet som $U_{i,j}$ $(i, j = 1, 2)$ tilfredstiller og gjør et steg ved hjelp av Gauss Seidel iterasjon med startpunktet $U^0_{1,1} = U^0_{2,1} = U^0_{1,2} = U^0_{2,2} = \frac{1}{2}$.

# Tabell over Laplacetransformerte

| $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)$ |
|---|---|
| $1$ | $\dfrac{1}{s}$ |
| $t$ | $\dfrac{1}{s^2}$ |
| $t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$ | $\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{at}$ | $\dfrac{1}{s-a}$ |
| $\cos\omega t$ | $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cosh at$ | $\dfrac{s}{s^2-a^2}$ |
| $\sinh at$ | $\dfrac{a}{s^2-a^2}$ |
| $e^{at}\cos\omega t$ | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$ |
| $e^{at}\sin\omega t$ | $\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$ |

# Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Forutsatt at $x$ og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Hvis nodene er jevnt fordelt (inkludert endepunktene), og $|f^{n+1}(x)| \leq M$, da gjelder

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} M \left( \frac{b-a}{n} \right)^{n+1}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f'(x) &= \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) - \frac{1}{2} h f''(\xi) \\
f''(x) &= \frac{1}{h^2}(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)) - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi)
\end{aligned}$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}
\end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned}
\text{Jacobi :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\
\text{Gauss-Seidel :} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

- En 2. ordens Runge-Kutta metode (Heun) for $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1 &= h\,\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\
\mathbf{K}_2 &= h\,\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{K}_1) \\
\mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)
\end{aligned}$$