Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D høsten 2008

Løsningsforslag

1 **a)** i)

$$\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3},$$
$$\mathcal{L}(t^2e^{2t}) = \frac{2}{(s-2)^3}. \quad \text{(1. Skifteteorem)}$$

ii)

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \sin\tau \sin(t-\tau)\,d\tau\right) = \left(\frac{1}{s^2+1}\right)^2. \quad \text{(Konvolusjonsteoremet)}$$

b) i)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = t,$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^2e^{-2s}\right) = (t-2)u(t-2).$$

ii)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\int_s^\infty \frac{d\tau}{\tau^2+1}\right) = \frac{\sin t}{t}.$$

c) Vi transformerer og får

$$s^2Y + sY + Y = e^{-s}\frac{1}{s},$$
$$Y = e^{-s}\frac{1}{s(s^2+s+1)}.$$

Som delbrøk blir Y av formen

$$Y = e^{-s}\left(\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1}\right).$$

Litt regning gir

$$\begin{aligned} Y &= e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1}\right) \\ &= e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right). \end{aligned}$$

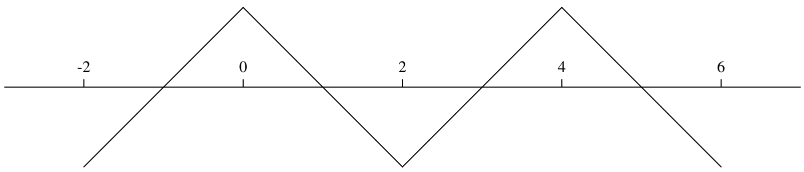
Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right)=1-e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$$

2. Skifteteorem gir

$$y(t)=u(t-1)\left(1-e^{-\frac{t-1}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)\right).$$

$\boxed{2}$ **a)**



Cosinusrekka til f blir av formen

$$f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos n\frac{\pi}{2}x.$$

Vi har $a_0=0$, og $a_n=\int_0^2 f(x)\cos n\frac{\pi}{2}x\,dx$. En gangs delvisintegrasjon viser at

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{for} \quad n \text{ like},\\ \frac{8}{\pi^2}\frac{1}{n^2} & \text{for} \quad n \text{ odde}.\end{cases}$$

b) Et standard argument, viser at løsningen kan skrives som

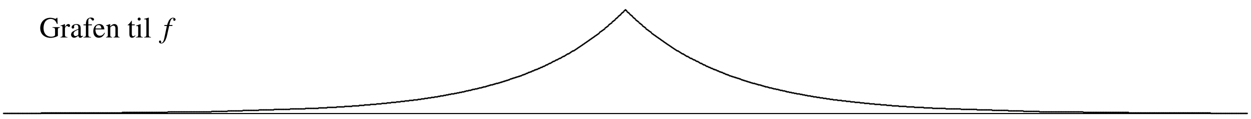
$$u(x,t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t}\cos n\frac{\pi}{2}x.$$

Vi får oppfylt initialbetingelsen ved å velge $A_n=a_n$ som i punkt **a**). Altså er

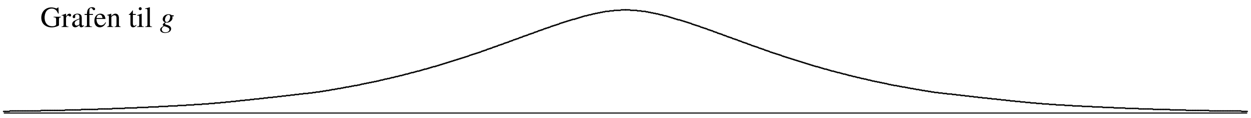
$$u(x,t)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}e^{-((2k+1)\frac{\pi}{2})^2 t}\cos(2k+1)\frac{\pi}{2}x.$$

$\boxed{3}$ **a)**

Grafen til f



Grafen til g



Fourierinverson gir oss f og g tilbake

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} e^{ixw}\, dw,$$
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+w^2)^2} e^{ixw}\, dw.$$

Siden f og g, og derfor også $\hat{f}$ og $\hat{g}$ er likefunksjoner forsvinner sinusdelen og vi har

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+w^2} \cos xw\, dw,$$
$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+w^2)^2} \cos xw\, dw.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin w}{(1+w^2)^2}\, dw = 0, \quad \text{fordi integranden er odde.}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+w^2)^2}\, dw = \frac{2\pi}{4} g(0) = \frac{\pi}{2}.$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 w}{(1+w^2)^2}\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2w}{(1+w^2)^2}\, dw = \frac{2\pi}{8}(g(0)+g(2)) = \frac{\pi}{4}(1+3e^{-2}).$$

b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|v|} e^{-|x-v|}\, dv = (f*f)(x). \qquad \text{Tar vi Fouriertransformen ser vi at}$$

$$\mathcal{F}(f*f)(w) = \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{1+w^2}\right)^2 = \hat{g}(w), \qquad \text{og følgelig er } (f*f)(x) = g(x).$$

4 Gradienten til f i punktet P er $\operatorname{grad} f(P) = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$. Den retningsderiverte av f i punktet P i retningen gitt ved enhetsvektoren $\boldsymbol{e} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ er $\operatorname{grad} f(P)\cdot\boldsymbol{e} = \frac{1}{5}(3\cdot 1 + 4\cdot(-2))) = -1$. Den retningsderiverte er størst i retningen til gradienten som er $\frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j})$.

5 **a)** Vi vil løse ligningen

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 27(x+y),$$

på firkanten $[0,1]\times[0,1]$ med randbetingelser

$$u(0,y) = u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 3x, \quad u(1,y) = 3y.$$

Approksimasjon av ligningen i noden (x_i, y_j) ved hjelp av sentraldifferanser, gir

$$U_{i+1}^{j} + U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j} + U_i^{j-1} - 4U_i^j = h^2 f(x_i, y_j),$$

hvor $U_i^j \approx u(x_i, y_j)$, $\quad f(x,y) = 27(x+y) \quad$ og $\quad x_i = ih$, $y_j = jh$, $h = 1/3$.

Approksimasjon av ligningen i (x_i, y_j), hvor $i, j \in \{1,2\}$, gir ligningene

$$
\begin{aligned}
-4U_1^1 + U_1^2 + U_2^1 + 0 + 0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) && \text{i} \quad (x_1, y_1),\\
-4U_2^1 + U_1^1 + U_2^2 + 0 + 3\cdot\frac{1}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) && \text{i} \quad (x_2, y_1),\\
-4U_1^2 + U_1^1 + U_2^2 + 3\cdot\frac{1}{3} + 0 &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right) && \text{i} \quad (x_1, y_2),\\
-4U_2^2 + U_1^2 + U_2^1 + 3\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 27\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) && \text{i} \quad (x_2, y_2).
\end{aligned}
$$

Dette kan skrives på matriseform

$$
\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}
$$

b) En iterasjon med Gauss-Seidel

$$
x_j^{(1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(1)} - \sum_{k=j+1}^{4} a_{jk}x_k^{(0)}\right), \quad j = 1, \ldots, 4,
$$

anvendt på ligningssystemet (1) i a) med startvektoren $\boldsymbol{U}^{(0)} = -[1,1,1,1]^T$, gir

$$
\begin{aligned}
(U_1^1)^{(1)} &= \frac{1}{-4}(2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)) &&= -1,\\
(U_2^1)^{(1)} &= \frac{1}{-4}(2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)) &&= -1,\\
(U_1^2)^{(1)} &= \frac{1}{-4}(2 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)) &&= -1,\\
(U_2^2)^{(1)} &= \frac{1}{-4}(0 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)) &&= -0.5.
\end{aligned}
$$

En iterasjon med Gauss-Seidel på systemet

$$
\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \\ 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}
$$

med startvektoren $\boldsymbol{x}^{(0)} = -[1,1,1,1]^T$, gir

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{-5}(2.5 - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)) &&= -1.1,\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{-5}(2 - 1\cdot(-1.1) - 1\cdot(-1) - 1\cdot(-1)) &&= -1.02,\\
x_3^{(1)} &= \frac{1}{-5}(2 - 1\cdot(-1.1) - 1\cdot(-1.02) - 1\cdot(-1)) &&= -1.024,\\
x_4^{(1)} &= \frac{1}{-5}(-0.5 - 1\cdot(-1.1) - 1\cdot(-1.02) - 1\cdot(-1.024)) &&= -0.5288.
\end{aligned}
$$

De eksakte løsningene av ligningssytemene er like.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{6}$ **a)** For de tre foreslåtte fikspunktiterasjonene(på formen $x_{n+1} = g(x_n)$) sjekker vi $g'(x)$.

- For nummer 1) er $g'(x) = 3x^2$. Siden $g'(1) > 1$ og $g'(x)$ er monotont økende er $g'(x) > 1$ for $x \in I$, og vi vet da at iterasjonen ikke vil konvergere til en løsning i I, uansett startverdi $x_0 \in I$.
- For nummer 2) er $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$ og $g'(1.5) < -1$. $g'(x)$ er monotont økende, og $|g'(x)| > 1$ for $x \in I$
- For nummer 3) er $g'(x) = \frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$. Siden $g'(1) < 1$, $g'(1.5) < 1$, og $g'(x)$ er monotont minkende, vil $|g'(x)| < 1$ for $x \in I$, og iterasjonen konvergerer for alle $x_0 \in I$. Dette er den vi bør bruke.

Utfører vi iterasjonen får vi $x_0 = 1,\ x_1 = 1.2599,\ x_2 = 1.3122,\ x_3 = 1.3223,\ x_4 = 1.3242$. Videre vil de tre første sifrene forbli uforandret, og vi kan konkludere at $s = 1.32\ldots$.

b) Bruker vi metoden med Newtons dividerte differanser, får vi skjemaet

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 & \\ 2 & 5 & & \end{array}$$

Polynomet blir $-1 + 0 \cdot (x-0) + 3 \cdot (x-0)(x-1) = 3x^2 - 3x - 1$, med nullpunkter 1.26376 og -0.26376. Vi må velge det nullpunktet som ligger inne i intervallet, altså blir vår approksimasjon $s^* = 1.26376$.
NB: Om interpolasjonspunktene hadde ligget tettere ville vi selvsagt fått et mer nøyaktig resultat. Denne metoden er faktisk en av komponentene i matlabs *fminsearch*.