Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Vedlegg: Formelark og tabeller

Faglig kontakt under eksamen:
Finn Knudsen (73 59 35 23) (916 34 712)

EKSAMEN I TMA4135 MATEMATIKK 4D

Bokmål
Mandag 14. desember 2009
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (HP 30S)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur 14. januar 2010.

Alle svar skal begrunnes, og det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1 Løs følgende ligninger ved hjelp av Laplacetransformasjonen.

a)

$$y'' + \omega^2 y = u(t-1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

b)

$$y' - y + \int_0^t e^v y(t-v)\,dv = e^t, \quad y(0) = 1.$$

Oppgave 2 La $f(x)$ være den odde periodiske funksjonen med periode 4 som er bestemt av at

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{når} \quad \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{når} \quad \frac{3}{2} < x < 2. \end{cases}$$

Det oppgis at Fourierrekken til f er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\frac{\pi}{2}x)$, der koeffisientene $b_n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\chi(n)}{n}$, og

$$\chi(n) = \begin{cases} 0 & \text{når} \quad n = 2k, \\ 1 & \text{når} \quad n = 8k \pm 1, \\ -1 & \text{når} \quad n = 8k \pm 3, \end{cases}$$

for $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ og $n > 0$.

a) Skisser grafen til f for $-2 < x < 6$.

b) Finn summen av rekkene

$$S_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \cdots,$$

$$S_2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \cdots.$$

Oppgave 3

a) Finn alle funksjoner av formen $F(x)G(t)$ som tilfredsstiller

(1) $$u_t = u_{xx},$$

(2) $$u(0,t) = u(2,t) = 0.$$

b) Finn funksjonen $u(x,t)$ som i tillegg til (1) og (2) også tilfredsstiller

(3) $$u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right).$$

Oppgave 4

a) La f være en funksjon som er definert for alle $-\infty < x < \infty$. Vis at $f^{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$ er en likefunksjon og $f^{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ en oddefunksjon. Skriv funksjonen $e^{-|x|}e^{-ix}$ som summen av en likefunksjon og en oddefunksjon.

b) Vis at Fouriertransformen til en likefunksjon er en likefunksjon og at Fouriertransformen til en oddefunksjon er en oddefunksjon.

c) Vis at $\mathcal{F}(f(x)e^{-iax})(w) = \mathcal{F}(f(x))(w+a)$ for $a \geq 0$.

d) Det oppgis at Fouriertransformen til $g(x) = e^{-|x|}\cos x$ kan skrives $\widehat{g}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{w^2+2}{w^4+4}\right)$. Beregn verdien av

$$\int_0^\infty \frac{w^2+2}{w^4+4}dw.$$

Oppgave 5 La R være det triangulære området i x,y-planet bestemt av ulikhetene $0 < x < 1$ og $0 < y < x$. Vi skal løse Laplaces ligning med randbetingelser i området R.

Ligningen med randbetingelser er

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{for alle} \quad (x,y) \in R, \\ &u(x,x) = 0, \quad u(1,y) = 0, \quad u(x,0) = 16\,x(1-x). \end{aligned}$$

Bruk gitteret bestemt av punktene $(x_i, y_j) = (ih, jh)$, med $h = 0.25$. La $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$ og bruk 5-punkts approksimasjonen for $u_{xx} + u_{yy}$ til å sette opp et ligningssystem for de tre ukjente verdiene $X = U_{2,1}$, $Y = U_{3,1}$ og $Z = U_{3,2}$ i det indre av området.

Oppgave 6 Utfør en iterasjon med Gauss-Seidels metode på ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

med startverdiene $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})^{\mathrm{T}} = (2,1,0)^{\mathrm{T}}$.

Oppgave 7 Bruk Newtons dividerte differansers metode til å finne polynomet av grad høyst 4 som interpolerer datasettet

x	-1	1	2	3	5
f(x)	1	-1	1	5	19

.