Eksamen TMA4130
14. desember 2009

Løsningsforslag

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

$\boxed{1}$ **a)** Vi tar Laplacetransformen til hele ligningen og får

$$s^2 Y - s + \omega^2 Y = \frac{1}{s} e^{-s}.$$

Litt algebra gir

$$Y = \frac{e^{-s}}{s(s^2+\omega^2)} + \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Delbrøkoppspalting gir

$$Y = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right) e^{-s} + \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Inversjon gir

$$y(t) = \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \cos\omega(t-1)\right) u(t-1) + \cos\omega t.$$

b) Vi tar Laplacetransformen til hele ligningen og får

$$sY - 1 - Y + \frac{1}{s-1} Y = \frac{1}{s-1}.$$

Multipliserer med $s-1$ og får

$$s(s-1)Y - (s-1) - (s-1)Y + Y = 1.$$

Litt algebra gir

$$Y = \frac{s}{s^2 - 2s + 2}.$$

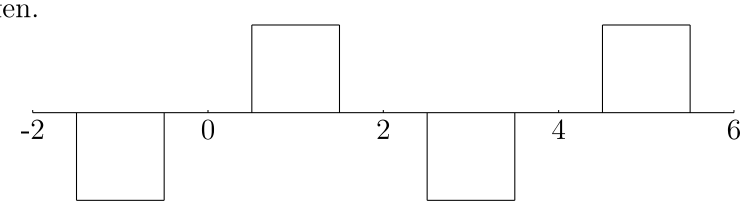
Dette kan vi skrive som

$$Y = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}.$$

Inversjon gir

$$y(t) = e^t(\cos t + \sin t).$$

$\boxed{2}$ **a)** Grafen.



b) Dersom vi antar at $f(x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, har vi

$$f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{1} - \frac{\sin(3\frac{\pi}{2}x)}{3} - \frac{\sin(5\frac{\pi}{2}x)}{5} + \frac{\sin(7\frac{\pi}{2}x)}{7} + \frac{\sin(9\frac{\pi}{2}x)}{9} - \cdots\right).$$

Setter vi $x = 1$ får vi

$$1 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \cdots\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}S_1.$$

Altså er

$$S_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Setter vi $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$\frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots\right) = \frac{2}{\pi}S_2.$$

Altså er

$$S_2 = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi setter $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i ligning (1). Da får vi

$$F''G = FG'.$$

Deler vi med FG får vi

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)}.$$

Siden x og t er frie variable må begge sider være en og samme konstant, altså

$$F''(x) = kF(x) \quad \text{og} \quad G'(t) = kG(t).$$

Løser vi disse ligningene og setter inn randbetingelsene får vi ikketrivielle løsninger kun når $k = -p^2$ og $\sin(2p) = 0$, som viser at vi må ha $p = n\frac{\pi}{2}$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Løsningene blir opp til multiplikasjon med en konstant,

$$u_n(x,t) = e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t}\sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right).$$

b) Siden ligningen og randbetingelsene er lineære og homogene kan vi bruke superposisjonsprinsippet. Det vil si at en lineær kombinasjon

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-(n\frac{\pi}{2})^2 t} \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right)$$

er løsning av (1) og (2). Setter vi $t=0$ og sammenligner med initialbetingelsen (3) får vi

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(n\frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right).$$

Dette viser at $b_n = 0$ unntatt for $n=1$ og $n=5$, og at

$$u(x,t) = e^{-(\frac{\pi}{2})^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 5e^{-(5\frac{\pi}{2})^2 t}\sin\left(5\frac{\pi}{2}x\right).$$

$\boxed{4}$ **a)** Vi må vise at $f^{\text{even}}(-x) = f^{\text{even}}(x)$ og at $f^{\text{odd}}(-x) = -f^{\text{odd}}(x)$. Dette sees umiddelbart ved innsetting. Vi har at $e^{ix} = \cos x + i\sin x$. Vi vet at $\cos x$ er en likefunksjon og $\sin x$ er en oddefunksjon. Funksjonen $e^{-|x|}$ er en likefunksjon. Siden produktet av to likefunksjoner er en likefunksjon og produktet av en likefunksjon og en oddefunksjon er en oddefunksjon har vi

$$e^{-|x|}e^{-ix} = e^{-|x|}\cos x - ie^{-|x|}\sin x.$$

Alternativt kan vi konstruere

$$f^{\text{even}}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x|}e^{-ix} + e^{-|-x|}e^{-i(-x)}\right) = e^{-|x|}\cos x,$$
$$f^{\text{odd}}(x) = \frac{1}{2}\left(e^{-|x|}e^{-ix} - e^{-|-x|}e^{-i(-x)}\right) = -ie^{-|x|}\sin x.$$

Siden $f(x) = f^{\text{even}}(x) + f^{\text{odd}}(x)$ får vi samme resultat som ovenfor.

b) Anta at f er odde. Da er $f(x)e^{-ixw} = -if(x)\sin xw + f(x)\cos xw$. Her er $f(x)\cos xw$ en oddefunksjon, så $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos xw\,dx = 0$. Følgelig er

$$\mathcal{F}(f(x)) = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin xw\,dx,$$

og dette er en oddefunksjon siden $\sin xw$ er en oddefunksjon av w for alle x. Tilsvarende for en likefunksjon.

c)

$$\mathcal{F}(f(x)e^{-iax})(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iax}e^{-ixw}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix(w+a)}dx$$
$$= \mathcal{F}(f(x))(w+a).$$

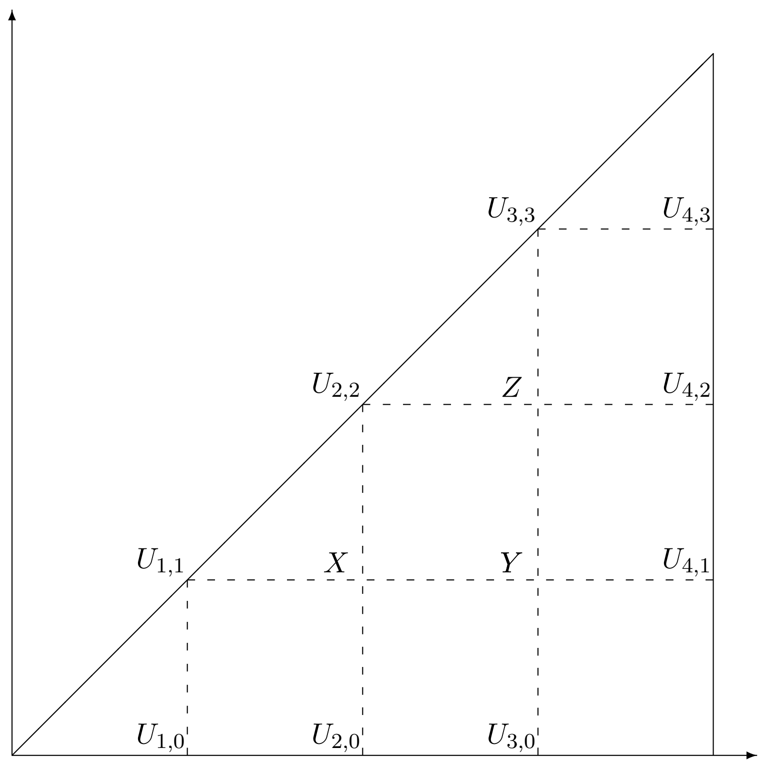
d) Inversjon gir

$$e^{-|x|}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{w^2+2}{w^4+4}\right)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{w^2+2}{w^4+4}\right)e^{ixw}dw$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{w^2+2}{w^4+4}\cos xw\,dw = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{w^2+2}{w^4+4}\cos xw\,dw.$$

Setter vi $x = 0$ får vi

$$\int_0^{\infty}\frac{w^2+2}{w^4+4}dw = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{5}$ Området R med grid.



Verdiene på randen er

$$U_{4,1} = U_{4,2} = U_{4,3} = U_{1,1} = U_{2,2} = U_{3,3} = 0, \quad U_{1,0} = U_{3,0} = 3 \quad \text{og} \quad U_{2,0} = 4.$$

Bruk av 5-punktsformelen på de indre punktene $U_{2,1}$, $U_{3,1}$ og $U_{3,2}$ gir:

$$\begin{aligned} U_{3,1} + U_{1,1} + U_{2,2} + U_{2,0} - 4\,U_{2,1} &= 0 \\ U_{4,1} + U_{2,1} + U_{3,2} + U_{3,0} - 4\,U_{3,1} &= 0 \\ U_{4,2} + U_{2,2} + U_{3,3} + U_{3,1} - 4\,U_{3,2} &= 0 \end{aligned}$$

Vi har her valgt å liste opp ligningene i naturlig orden.

Ved å benytte de kjente verdiene på randen og definere de ukjente verdiene som $X = U_{2,1}$, $Y = U_{3,1}$ og $Z = U_{3,2}$, reduserer ligningene seg til

$$\begin{aligned} 4X - \;\; Y \;\;\;\;\;\;\;\; &= 4 \\ -X + 4Y - \;\; Z &= 3 \\ - \;\; Y + 4Z &= 0 \end{aligned}$$

Disse ligningene kan også skrives på matriseform som

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6 Vi skriver de tre ligningene på følgende form:

$$\begin{aligned} 4x &= 4 + y \\ 4y &= 3 + x + z \\ 4z &= y \end{aligned}$$

Gauss-Seidel gir da (bruker hele tiden sist tilgjengelige informasjon):

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (4 + y^{(n)}) \\ y^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (3 + x^{(n+1)} + z^{(n)}) \\ z^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot y^{(n+1)} \end{aligned}$$

Med de gitte startverdiene ($n = 0$) får vi da:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (4 + 1) = \frac{5}{4} = 1.25 \\ y^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (3 + \frac{5}{4} + 0) = \frac{17}{16} = 1.06 \\ z^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{17}{16} = \frac{17}{64} = 0.266 \end{aligned}$$

Løsningsvektoren etter en iterasjon er altså $(5/4,\ 17/16,\ 17/64)^T$.

7 Differansetabellen blir seende slik ut.

x_j	$f_j = f[x_j]$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}]$
-1	1				
		-1			
1	-1		1		
		2		0	
2	1		1		0
		4		0	
3	5		1		
		7			
5	19				

Dividerte differanser på det gitte datasettet gir:

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f[x_0, x_1] &= -1 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= 1 \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= 0 \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= 0 \end{aligned}$$

Interpolasjonspolynomet er dermed gitt som:

$$\begin{aligned} p(x) &= f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\ &= 1 + (x - (-1)) \cdot (-1) + (x - (-1))(x - 1) \cdot 1 \\ &\quad + (x - (-1))(x - 1)(x - 2) \cdot 0 + (x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot 0 \\ &= x^2 - x - 1. \end{aligned}$$