Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Eksamen TMA4125/30/35 9. august 2010

Løsningsforslag

$\boxed{1}$ **a)**

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2},$$
$$\mathcal{L}(te^{bt}) = \frac{1}{(s-b)^2},$$
$$\mathcal{L}((t-a)e^{b(t-a)}u(t-a)) = e^{-as}\frac{1}{(s-b)^2},$$

altså er

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-as}\frac{1}{(s-b)^2}\right) = (t-a)e^{b(t-a)}u(t-a).$$

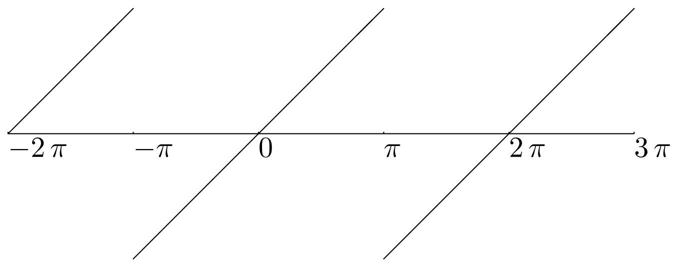
b) Vi Laplacetransformerer og får

$$\mathcal{L}(y''+2y'+y) = s^2Y - s - 1 + 2sY - 2 + Y = \mathcal{L}(\delta(t-2)) = e^{-2s},$$
$$(s^2+2s+1)Y = s+3+e^{-2s},$$
$$Y = \frac{s+3+e^{-2s}}{(s^2+2s+1)} = \frac{s+1}{(s^2+2s+1)} + \frac{1}{(s^2+2s+1)} + e^{-2s}\frac{2}{(s^2+2s+1)}$$
$$= \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+1)^2} + e^{-2s}\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Vi transformerer tilbake og får

$$y = e^{-t} + 2te^{-t} + (t-2)e^{-(t-2)}u(t-2).$$

$\boxed{2}$ **a)** Skisse av grafen til f.



$$f(3\pi) = 0.$$

b)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

hvor koeffisientene b_n er gitt ved

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-1}{n}x\cos nx + \frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^\pi \\ &= \frac{-2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Altså

$$f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} - \cdots\right)$$

La $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$. Setter $x = \pi/2$ i uttrykket for Fourierrekken og får

$$\frac{\pi}{2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{0}{2} + \frac{-1}{3} - \frac{0}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right) = 2S,$$

altså

$$S = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi setter $u(x,y) = F(x)G(y)$ inn i differensialligningen og får

$$F''G + 4FG'' = 0$$

som gir

$$\frac{F''}{F} + 4\frac{G''}{G} = 0$$

som igjen gir

$$\frac{F''}{F} = k \quad \text{og} \quad \frac{G''}{G} = -\frac{k}{4}.$$

Randbetingelsene gir oss at $k = -n^2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dette gir

$$F_n(x) = \sin nx \qquad \text{og} \qquad G_n(y) = A_n\cosh\frac{n}{2}y + B_n\sinh\frac{n}{2}y,$$

og følgelig er

$$u_n(x,y) = \sin nx\left(A_n\cosh\frac{n}{2}y + B_n\sinh\frac{n}{2}y\right).$$

b) Siden ligningen (I) og randbetingelsene (II) er homogene kan vi benytte superposisjonsprinsippet. En funksjon som tilfredsstiller både (I),(II) og (III) er av formen $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$.
Setter vi $y = 0$ finner vi $0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx$, som viser at $A_n = 0$ for alle n.
Ved å sette inn $y = 2$ finner vi $x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin nx \sinh n$, som viser at $B_n \sinh n = b_n$ for alle n. Altså er

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\sinh n}\sin nx\sinh\left(\frac{n}{2}y\right).$$

$\boxed{4}$ Ved å benytte den inverse Fouriertransformen får vi

$$e^{-ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-w^2}{4a}} \left(\cos wx + i \sin wx\right)\, dw.$$

Siden sin er en odde funksjon og cos og $e^{\frac{-w^2}{4a}}$ er likefunksjoner har vi

$$e^{-ax^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{\frac{-w^2}{4a}} \cos wx\, dw.$$

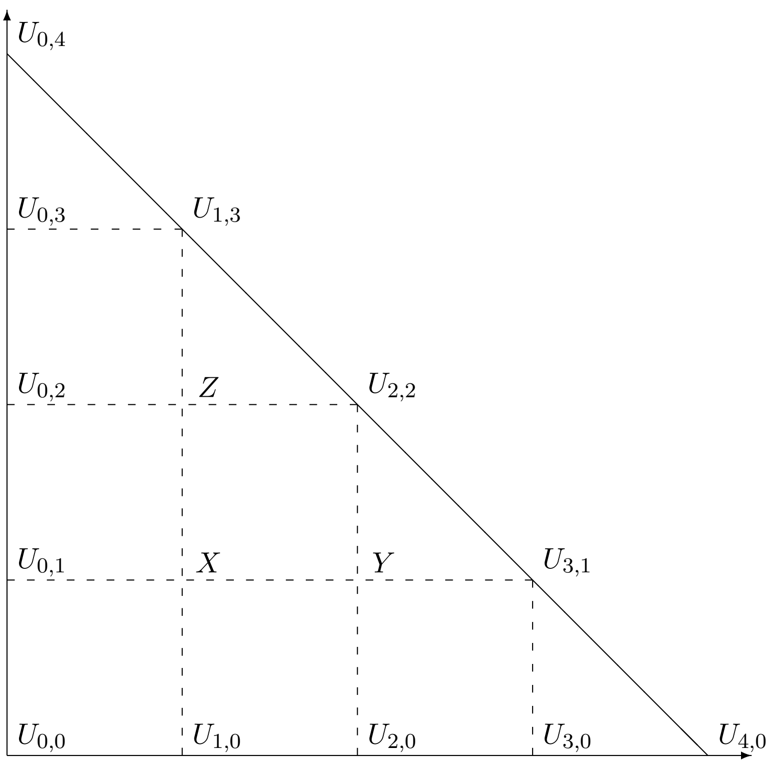
Ved å sette $a = \frac{1}{4}$ finner vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \cos wx\, dw = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}},$$

og ved å sette $x = 1$ finner vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \cos w\, dw = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{4}}, \quad \text{og} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} \sin w\, dw = 0.$$

$\boxed{5}$ Området R med grid.



Verdiene på randen er alle lik null, dvs

$U_{0,0} = U_{1,0} = U_{2,0} = U_{3,0} = U_{4,0} = U_{0,1} = U_{0,2} = U_{0,3} = U_{0,4} = U_{1,3} = U_{2,2} = U_{3,1} = 0.$

Bruk av 5-punktsformelen på de indre punktene $U_{1,1}$, $U_{2,1}$ og $U_{1,2}$ gir:

$$\frac{U_{0,1}+U_{2,1}+U_{1,0}+U_{1,2}-4\,U_{1,1}}{h^2}-16\,U_{1,1}=16(h+h)$$
$$\frac{U_{1,1}+U_{3,1}+U_{2,0}+U_{2,2}-4\,U_{2,1}}{h^2}-16\,U_{2,1}=16(2h+h)$$
$$\frac{U_{0,2}+U_{2,2}+U_{1,1}+U_{1,3}-4\,U_{1,2}}{h^2}-16\,U_{1,2}=16(h+2h)$$

Vi har her valgt å liste opp ligningene i naturlig orden.

Ved å benytte de kjente verdiene på randen, benytte at $h = 0.25$ (dvs $16h^2 = 1$), og definere de ukjente verdiene som $X = U_{1,1}$, $Y = U_{2,1}$ og $Z = U_{1,2}$, reduserer ligningene seg til

$$\begin{aligned} Y+Z-5X &= 1/2 \\ X-5Y &= 3/4 \\ X-5Z &= 3/4 \end{aligned}$$

Disse ligningene kan også skrives på matriseform som

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{6}$ Vi skriver de tre ligningene på følgende form:

$$\begin{aligned} 4x &= 4 \\ 4y &= 3+x \\ 4z &= 2+x+y \end{aligned}$$

Gauss-Seidel gir da (bruker hele tiden sist tilgjengelige informasjon):

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= \frac{1}{4}\cdot 4 \\ y^{(n+1)} &= \frac{1}{4}\cdot(3+x^{(n+1)}) \\ z^{(n+1)} &= \frac{1}{4}\cdot(2+x^{(n+1)}+y^{(n+1)}) \end{aligned}$$

Med de gitte startverdiene ($n = 0$) får vi da:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \frac{1}{4}\cdot 4 = 1 \\ y^{(1)} &= \frac{1}{4}\cdot(3+4) = 1 \\ z^{(1)} &= \frac{1}{4}\cdot(2+1+1) = 1 \end{aligned}$$

Løsningsvektoren etter en iterasjon er altså $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})^T = (1,\ 1,\ 1)^T$.

Skriver så ligningene i motsatt rekkefølge. Etter omskriving kan disse skrives som

$$\begin{aligned} 4z &= 2 + x + y \\ 4y &= 3 + x \\ 4x &= 4 \end{aligned}$$

Gauss-Seidel gir da (bruker hele tiden sist tilgjengelige informasjon):

$$\begin{aligned} z^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (2 + x^{(n)} + y^{(n)}) \\ y^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot (3 + x^{(n)}) \\ x^{(n+1)} &= \frac{1}{4} \cdot 4 \end{aligned}$$

Med de gitte startverdiene ($n = 0$) får vi da:

$$\begin{aligned} z^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (2 + 0 + 0) = 1/2 \\ y^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot (3 + 0) = 3/4 \\ x^{(1)} &= \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

Løsningsvektoren etter en iterasjon er altså $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})^T = (1,\ 3/4,\ 1/2)^T$.
Den første løsningen er den mest nøyaktige siden denne er eksakt!

$\boxed{7}$ Differansetabellen blir seende slik ut.

x_j	$f_j{=}f[x_j]$	$f[x_j,x_{j+1}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3}]$	$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3},x_{j+4}]$
-1	-7				
		3			
1	-1		-2		
		-3		1	
2	-4		2		0
		1		1	
3	-3		6		
		19			
5	35				

Dividerte differanser på det gitte datasettet gir:

$$\begin{aligned} f_0 &= -7 \\ f[x_0, x_1] &= 3 \\ f[x_0, x_1, x_2] &= -2 \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3] &= 1 \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] &= 0 \end{aligned}$$

Interpolasjonspolynomet er dermed gitt som:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\
&\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
&\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \\
&= 1 + (x - (-1)) \cdot 3 + (x - (-1))(x - 1) \cdot (-2) \\
&\quad + (x - (-1))(x - 1)(x - 2) \cdot 1 + (x - (-1))(x - 1)(x - 2)(x - 3) \cdot 0 \\
&= -7 + 3(x + 1) - 2(x^2 - 1) + (x^2 - 1)(x - 2) \\
&= x^3 - 4x^2 + 2x.
\end{aligned}
$$