Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 1

Fra Kreysig K8, avsnitt 5.1

1 Av formlene 1, 2, 3 (eller formel 4 med $n = 0, 1, 2$) i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi

$$\mathcal{L}(a + bt + ct^2) = a\mathcal{L}(1) + b\mathcal{L}(t) + c\mathcal{L}(t^2) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c}{s^3}.$$

2

$$f(t) = \begin{cases} k & \text{for } 0 \leq t \leq c \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^c e^{-st} k\,\mathrm{d}t = k\left[\frac{e^{-st}}{c}\right]_0^c = \frac{k}{s}(1 - e^{-sc})$$

3 Vi skal finne den inverse Laplacetransformasjonen til funksjonen

$$F(s) = \frac{s-4}{s^2-4}.$$

Delbrøkoppspalting gir

$$F(s) = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+2} = \frac{3}{2}\frac{1}{s+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2},$$

og i følge skifte på s-aksen er

$$f(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{2t}.$$

En annen mulighet er å omforme uttrykket for F som følger

$$F(s) = \frac{s}{s^2-4} - \frac{4}{s^2-4} = \frac{s}{s^2-2^2} - 2\frac{2}{s^2-2^2}.$$

En sammenligning med tabell 5.1 gir da at

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \cosh 2t - 2\sinh 2t.$$

4 Ved å bruke formel 4 i tabell 5.1, Kreyszig s. 254, får vi, etter litt omforming,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{60+6s^2+s^4}{s^7}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{60}{s^7}+\frac{6}{s^5}+\frac{1}{s^3}\right\} \\
&= 60\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^7}\right\} + 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\
&= \frac{60}{6!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6!}{s^7}\right\} + \frac{6}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\} + \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\} \\
&= \frac{60}{720}t^6 + \frac{6}{4!}t^4 + \frac{1}{2!}t^2 = \frac{t^6}{12} + \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

Fra Kreysig K8, avsnitt 5.2

4 Vi skal løse

$$y'' - y' - 2y = 0$$

med initialbetingelser

$$y(0) = 8, y'(0) = 7$$

ved å benytte Laplacetransformen. La

$$Y \equiv \mathcal{L}\{y\}.$$

Da har vi videre at

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y'\} &= sY - y(0) = sY - 8 \\
\mathcal{L}\{y''\} &= s^2Y - 8s - 7.
\end{aligned}$$

Med dette transformerer vi ligningen vi startet med:

$$s^2Y - 8s - 7 - (sY - 8) - 2Y = 0 \tag{1}$$

$$Y = \frac{8s-1}{s^2-s-2} = \frac{8s-1}{(s+1)(s-2)} \tag{2}$$

Delbrøkoppspalter $Y(s)$ og finner at:

$$Y = \frac{3}{s+1} + \frac{5}{s-2}.$$

Vi kan nå enkelt inverstransformere Y ved å bruke første skiftteorem og at $\mathcal{L}\{1/s\} = 1$ og finner at:

$$y(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t}$$

4 Vi skal løse initialverdiproblemet

$$y'' + 2y' - 3y = 6e^{-2t}, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -14$$

Av regelen for å Laplacetransformere en $n$te-derivert (teorem 2, Kreyszig s. 259), her med $n = 2$, og tabell 5.1 (Kreyszig s. 254), formel 6, får vi, når vi setter $\mathcal{L}(y) = Y$:

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2[sY - y(0)] - 3Y = 6/(s+2)$$

det vil si

$$s^2Y - 2s + 14 + 2sY - 4 - 3Y = 6/(s+2)$$

Det gir

$$(s^2 + 2s - 3)Y = 2s - 10 + \frac{6}{s+2} = \frac{2s^2 - 6s - 14}{s+2}$$

Vi kan faktorisere $s^2 + 2s - 3 = (s+3)(s-1)$, og bruker delbrøkoppspalting for å forenkle uttrykket for Y:

$$Y = \frac{2s^2 - 6s - 14}{(s+2)(s^2 + 2s - 3)} = \frac{2s^2 - 6s - 14}{(s+2)(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s-1}$$

Vi får

$$A = -2, \quad B = \tfrac{11}{2}, \quad C = -\tfrac{3}{2} \qquad \text{og følgelig} \quad Y = -\frac{2}{s+2} + \frac{11/2}{s+3} - \frac{3/2}{s-1}.$$

Dermed får vi fra tabell 5.1 (Kreyszig s. 254):

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = -2e^{-2t} + \tfrac{11}{2}e^{-3t} - \tfrac{3}{2}e^{t}.$$