TMA4135
Matematikk 4D
Høsten 2009

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 10

1 Skal finne løsningen til likningen $\cos x \cosh x = 1$. x skal være i nærheten av $x = \frac{3}{2}\pi$
Finner først $f(x)$

$$f(x) = \cos x \cosh x - 1 = 0$$

Finner så $f'(x)$

$$f'(x) = -\sin x \cosh x + \cos x \sinh x$$

Velger $x(0) = 4.5$ som startverdi.

i	x_i	i	x_i
1	4.80388	3	4.73006
2	4.73492	4	4.73004

2 **a)** Vi skal finne polynomet $p_2(x)$, gitt ved

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) \cdot y_i,$$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-4)}{(-1-0)(-1-4)} = \frac{x^2-4x}{5} \\
L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-(-1))(x-4)}{(0-(-1))(0-4)} = \frac{x^2-3x-4}{-4} \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-(-1))(x-0)}{(4-(-1))(4-0)} = \frac{x^2+x}{21}.
\end{aligned}$$

Setter inn i summen, samler sammen leddene og får

$$p_2(x) = \frac{1}{20}\left(3x^2 - 17x + 20\right).$$

b) Vi har

$$f[x_j, ..., x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1}, ..., x_{j+k}] - f[x_j, ..., x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}.$$

j	x_j	y_j			
0	-1	2			
			-1		
1	0	1		0.15	
			-0.25		-0.175
2	4	0		-0.375	
			-1		
3	2	2			

Vi får $\quad f(x) \approx p_3(x) = 2 - (x+1) + 0.15x(x+1) - 0.175x(x+1)(x-4).$

$\boxed{3}$ **a)**

$$J_{0.5} = \tfrac{0.5}{2}(e^0 + 2e^{-0.5} + 2e^{-1.0} + 2e^{-1.5} + e^{-2.0}) = 0.882604. \tag{1}$$

Den 2. deriverte av $e^{-x} = e^{-x}$, og e^{-x} ligger mellom e^0 og e^{-2}, så når $h = 0.5$ får vi

$$-\frac{2-0}{12}h^2e^0 \leq \epsilon_T \leq -\frac{2-0}{12}h^2e^{-2}$$
$$-0.0417 \leq \epsilon_T \leq -0.0056$$

altså

$$0.0056 \leq |\epsilon_T| \leq 0.0417.$$

b)

$$J_{0.5} = \tfrac{0.5}{3}(e^0 + 4e^{-0.5} + 2e^{-1.0} + 4e^{-1.5} + e^{-2.0}) = 0.864957. \tag{2}$$

Feilen

$$\epsilon_s = \int_0^2 e^{-x}dx - J_{0.5} = -\frac{2-0}{180}h^4e^{-\hat{t}}, \qquad \hat{t} \in (0,2)$$

Siden den 4.deriverte av $e^{-x} = e^{-x}$ betyr det at e^{-x} ligger mellom e^0 og e^{-2}, og når $h = 0.5$ får vi

$$\tfrac{2}{180}0.5^4e^{-2} < |\epsilon_s| < \tfrac{2}{180}0.5^4$$

eller

$$9.4 \cdot 10^{-5} < |\epsilon_s| < 6.94 \cdot 10^{-4}$$

c) For å bruke Gausskvadratur må vi skrive om integralet.

$$\int_0^2 e^{-1}\,dx = \int_{-1}^1 e^{-(t+1)}\,dt.$$

Approksimer I med Gausskvadratur

$$\int_{-1}^1 e^{-(t+1)}\,dt \approx \sum_{i=1}^3 A_i e^{-(t_i+1)} = \frac{5}{9}e^{-(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1)} + \frac{8}{9}e^{-(0+1)} + \frac{5}{9}e^{-(\sqrt{\frac{3}{5}}+1)} = 0.86464.$$

Feilen her blir

$$\epsilon_G = I - J_3 \approx 2.4 \cdot 10^{-5}.$$