Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 12

1 a) Jacobi-metoden er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^{(m)}$$

De første tre iterasjonene blir

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.125 \\ 0.25 \end{bmatrix}.$$

b) Gauss-Seidel-metoden er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} x^{(m+1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^{(m)}$$

De første tre iterasjonene blir

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 1.0625 \\ 0.23438 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.23438 \\ 1.13281 \\ 0.21680 \end{bmatrix}.$$

En kan se at Gauss-Seidel-metoden konvergerer raskere enn Jacobi. Dette gjelder også generelt.

Vi vet at Jacobi og Gauss-Seidel for et lineært system $Ax = b$ kan skrives på den generelle formen $Mx^{(n+1)} = Nx^{(n)} + b$. Vi multipliserer med M^{-1} for å få formen oppgaven ber om,

$$x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b,$$

og vi har $C = M^{-1}N$ og $g = M^{-1}b$. For at vi skal ha konvergens må $\|C\| < 1$ være oppfylt, der $\|\cdot\|$ er en aller en annen norm. Vi bruker Frobenius normen, og for Jacobi iterasjonen får vi,

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2} = \sqrt{4\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} < 1$$

med andre ord vi har konvergens. For Gauss-Seidel får vi

$$\|C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}^2} = \sqrt{0.25002^2 + 0.06252^2 + 0.25002^2 + 0.01562^2 + 0.06252^2}$$
$$= 0.3648 < 1$$

som medfører konvergens.

$\boxed{2}$ Vi bruker tilnærmelsene

$$u_{xx}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

og

$$u_{yy}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}) \; .$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{21}) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{12}) &= -1 \\ \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{21} + 1) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{21} + 1) &= -1 \\ \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{12} + 1) + \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{12} + 1) &= -1 \; . \end{aligned}$$

Setter inn $h = 1/4$ og får ligningene

$$\begin{aligned} -4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -33/16 = -2.0625 \\ u_{11} - 4u_{21} &= -49/16 = -3.0625 \\ u_{11} - 4u_{12} &= -49/16 = -3.0625 \; . \end{aligned}$$

Disse har løsningene

$$u_{11} = 115/112 = 1.0268, u_{12} = u_{21} = 229/224 = 1.0223$$

$\boxed{3}$ **a)**

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0.6 \end{bmatrix} .$$

Da får vi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \frac{0.2}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{bmatrix} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.1 \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5.4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 2.46 \\ 0.6 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

så $x(0.2) \approx 2.46$, $y(0.2) \approx 0.6$.

b) Baklengs Euler

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} .$$

Da får vi ved å flytte over det siste leddet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.8 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} .$$

Vi har

$$\begin{bmatrix} 1 & 1.8 \\ -0.2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1.36} \begin{bmatrix} 1 & -1.8 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix}$$

så

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.36} \begin{bmatrix} 1 & -1.8 \\ 0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.206 \\ 0.441 \end{bmatrix} ,$$

så $x(0.2) \approx 2.206$, $y(0.2) \approx 0.441$.

c) Den eksakte løsninga i $t = 0.2$ er $x(0.2) = 2.4760$, $y(0.2) = 0.5646$. Vi ser at Heuns metode gir et bedre estimat, som er å forvente siden den er en 2. ordens metode, mens baklengs Euler er 1. orden.