Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 13

1 Ved bruk av Laplacetransformasjonen svarer differensialligningen med initialbetingelsene til den lineære ligningen

$$s^2Y + 4sY + 4Y = F(s)$$

som gir

$$Y(s) = \frac{F(s)}{(s+2)^2}.$$

Ved hjelp av enhets trappefunksjonen kan vi skrive

$$f(t) = 5\sin t - 5\sin(t-2\pi)u(t-2\pi)$$

og dermed blir

$$F(s) = \frac{5}{s^2+1} - \frac{5}{s^2+1}e^{-2\pi s} = \frac{5}{s^2+1}(1-e^{-2\pi s}).$$

Setter vi $Y(s) = G(s)(1-e^{-2\pi s})$, ser vi at

$$G(s) = \frac{5}{(s^2+1)(s+2)^2} = \frac{1}{5}\frac{3-4s}{(s^2+1)} + \frac{1}{5}\frac{4}{(s+2)} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Inverse Laplacetransformasjon gir

$$g(t) = \frac{3}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t + \frac{4}{5}e^{-2t} + te^{-2t}$$

og

$$y(t) = g(t) - g(t-2\pi)u(t-2\pi),$$

slik at

$$y(2\pi) = g(2\pi) - g(0) = \left(2\pi + \frac{4}{5}\right)e^{-4\pi} - \frac{4}{5}.$$

2 Setter vi $u = FG$ inn i ligning (1) får vi $t^3G'F = F''G$ og siden vi ikke er interessert i den trivielle løsningen får vi $\dfrac{t^3G'F}{FG} = \dfrac{F''G}{FG}$ som gir oss at $\dfrac{t^3G'}{G} = \dfrac{F''}{F} =$ konstant. For å få oppfylt randkravene (2) må vi ha at konstanten kun kan ta verdiene $-n^2$ for $n = 1, 2, \ldots$, og dermed får vi ligningene

$$\frac{F''}{F} = -n^2 \quad \text{for } n = 1, 2, \ldots.$$

For verdien $-n^2$ blir løsningen $F_n(x) = \sin nx$ opp til multiplikasjon med en vilkårlig konstant som vi tar inn i løsningen av den andre ligningen, nemlig

$$\frac{t^3 G'}{G} = -n^2 \quad \text{som kan skrives på formen} \quad \frac{dG}{G} = -n^2 \frac{dt}{t^3}.$$

Integrasjon gir oss løsningene

$$G_n(t) = B_n\, e^{\frac{n^2}{2t^2}} \qquad \text{for en vilkårlig konstant } B_n.$$

Superposisjonsprinsippet forteller oss at den generelle løsningen av (1) som tilfredstiller randkravene (2), kan skrives som Fourierrekke

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{\frac{n^2}{2t^2}} \sin nx.$$

Setter vi så inn initialkravet $u(x,1) = 4\sin x + \sin 4x$ gir dette at alle B_n-ene forsvinner bortsett fra at $B_1 e^{\frac{1}{2}} = 4$ og $B_4\, e^8 = 1$. Løsningen blir

$$u(x,t) = 4e^{\frac{1}{2}(\frac{1}{t^2}-1)} \sin x + e^{8(\frac{1}{t^2}-1)} \sin 4x.$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi setter $U(w,t) = \mathcal{F}(u)(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw} u(x,t)dx$.
Fouriertransformerer vi ligningen blir den transformerte

$$U_t = -w^2 U - U = -(w^2+1)U.$$

Dette er en første ordens ordinær differensialligning, og den generelle løsningen er

$$U(w,t) = A(w) e^{-(w^2+1)t}.$$

Ved å sette inn for $t = 0$ ser vi at $A(w) = U(w,0)$.

b) Initialbetingelsen gir $U(w,0) = \mathcal{F}(e^{-\frac{1}{2}x^2})(w) = e^{-\frac{1}{2}w^2}$. Fra punkt a) får vi derfor at

$$U(w,t) = e^{-\frac{1}{2}w^2} e^{-(w^2+1)t} = e^{-t} e^{-(t+\frac{1}{2})w^2}.$$

Den inverse Fouriertransformen gir oss

$$u(x,t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2t+1}}\, e^{-\left(\frac{x^2}{4t+2}\right)}.$$

$\boxed{4}$ Vi regner først ut gradienten.

$\mathrm{grad} f =$
$[2yz(e^x + e^y - e^z) + 2xyze^x]\mathbf{i} + [2xz(e^x + e^y - e^z) + 2xyze^y]\mathbf{j} + [2xy(e^x + e^y - e^z) - 2xyze^z]\mathbf{k}.$

Evaluering i punktet $P : (1, -1, -1)$ gir oss

$$\mathrm{grad} f|_P = 4e\mathbf{i} + (-2e + 2e^{-1})\mathbf{j} + (-2e - 2e^{-1})\mathbf{k}.$$

Enhetsvektoren vinkelrett både på $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ og $\mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$ og som har negativ $\mathbf{k}$-komponent er $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Vi finner at den retningsderiverte er

$$D_{\mathbf{e}} f|_P = \frac{8e}{\sqrt{3}}.$$

$\boxed{5}$ Simpsons metode med $h = 0.25$ gir

$$S = \frac{0.25}{3}(e^2 + 4e^{2.5} + 2e^3 + 4e^{3.5} + e^4) = 23.612505$$

Øvre grense for feilen er gitt ved

$$|I - S| \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

med $b = 2$, $a = 1$, $n = 4$ og

$$M_4 = \max_{1 \leq x \leq 2} |f^{(4)}(x)| = \max_{1 \leq x \leq 2} |2^4 e^{2x}| = 16e^4$$

får vi

$$|I - S| \leq \frac{16e^4}{180 \cdot 4^4} = 0.01895.$$

Simpsons metode med $h = 0.5$ oppgis til å gi tilnærmelsen $\tilde{S} = 23.721559$. En tilnærmelse til feilen i S er gitt ved

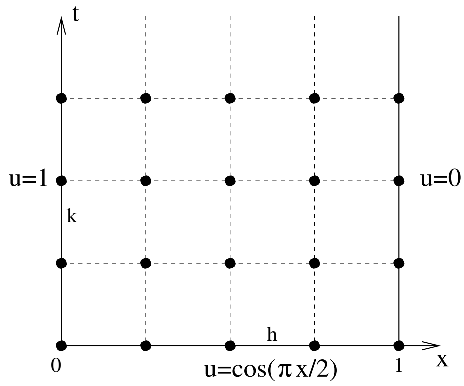
$$I - S = \frac{1}{15}(S - \tilde{S}) = -7.27 \cdot 10^{-3}.$$

(Til sammenligning, selv om dette ikke er en del av oppgaven, er feilen $I - S = -7.95 \cdot 10^{-3}$.)

$\boxed{6}$ Vi bruker følgende approksimasjoner til de deriverte i henholdsvis $t-$ og $x-$ retningen:

$$u_t(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_j + k) - u(x_i, t_j)}{k}$$

$$u_{xx}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i+h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i-h, t_j)}{h^2}$$



Setter vi dette inn i differenesialligningen, og lar $u_{x_i,t_j} \approx u_{i,j}$ i hvert gitterpunkt, får vi differanseligningen

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + x_i$$

Løser vi dette med hensyn på $u_{i,j+1}$, og setter inn rand- og startbetingelsene, får følgende eksplisitte metode:

La $u_{i,0} = 1 - x_i$, $i = 0, 1, \cdots, N$, med $N = 1/h$.

for $j = 0, 1, 2, 3$

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} + \frac{k}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + k\, x_i, \qquad i = 1, \cdots, N-1$$

$$u_{0,j+1} = 1, \qquad u_{N,j+1} = 1$$

end

Med $h = 0.25$ og $k = 0.01$ får vi at $k/h^2 = 0.16$. Startbetingelsen gir

$$u_{00} = 1.0, \quad u_{10} = 0.9239, \quad u_{20} = 0.7071, \quad u_{30} = 0.3827, \quad u_{40} = 0.0,$$

slik at

$$\begin{aligned} u(0.25, 0.01) \approx u_{11} &= 0.9239 + 0.16(1.0 - 2 \cdot 0.9239 + 0.7071) + 0.01 \cdot 0.25 &&= 0.9039 \\ u(0.5, 0.01) \approx u_{21} &= 0.7071 + 0.16(0.9239 - 2 \cdot 0.7071 + 0.3827) + 0.01 \cdot 0.5 &&= 0.6949 \\ u(0.75, 0.01) \approx u_{31} &= 0.3827 + 0.16(0.7071 - 2 \cdot 0.3827 + 0) + 0.01 \cdot 0.75 &&= 0.3809. \end{aligned}$$

7 Setter vi $Y = \mathcal{L}(y)$ og transformerer, får vi ligningen

$$sY - 1 + Y + \frac{Y}{s-1} = \frac{e^{-s}}{s}$$

Med litt regning gir dette

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3}\right)$$

Ved å transformere tilbake får vi ved hjelp av 2. skifteteorem at

$$y(t) = 1 - t - \frac{1}{2}u(t-1)\left(t^2 - 4t + 3\right).$$

8 La S_1 og S_2 betegne summene av de gitte rekkene, henholdsvis.

Fra konvergensteoremet for Fourierrekker har vi (siden f er kontinuerlig overalt)

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} \cos nx \quad \text{for} \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Sett $x = \pi$ og bruk at $\cos n\pi = (-1)^n$. Det gir

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4} = \frac{\pi^4}{5} + 8S_1 \implies S_1 = \frac{1 - 1/5}{8}\pi^4 = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{10}}}.$$

Parsevals identitet

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx$$

gir i vårt tilfelle

$$2\left(\frac{\pi^4}{5}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8(-1)^n(\pi^2 n^2 - 6)}{n^4}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^8\,dx$$

dvs.

$$\frac{2\pi^8}{25} + 64S_2 = \frac{2\pi^8}{9} \implies S_2 = \frac{2\pi^8}{64}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{25}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi^8}{450}}}.$$

$\boxed{9}$ **a)** Ligningen gir

$$F(x)[G''(t) + G'(t)] = F''(x)G(t) \implies \frac{G''(t) + G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

der k må være konstant. Følgelig har vi

$$F''(x) = kF(x), \tag{1}$$
$$G''(t) + G'(t) = kG(t). \tag{2}$$

Randbetingelsen gir

$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{3}$$

Vi løser først randverdiproblemet (1), (3). Det er tre muligheter:

1. $k > 0$. Da skriver vi $k = \mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, men (3) gir $A = B = 0$, såvi kan se bort fra $k > 0$.
2. $k = 0$. Gir generell løsning $F(x) = Ax + B$, men (3) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k = 0$.
3. $k < 0$. Da skriver vi $k = -\mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, men (3) gir $A = 0$ og $B\sin\mu\pi = 0$. Derfor må $\mu = n$, der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi konkluderer at $F(x) = F_n(x) = B_n \sin nx$, svarende til $k = -n^2$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nå løser vi (2) med $k = -n^2$, dvs.

$$G''(t) + G'(t) + n^2 G(t) = 0$$

Kar. lign. er $\lambda^2 + \lambda + n^2 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + n^2 - \frac{1}{4} = 0$, som har røtter

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

Derfor er

$$G(t) = G_n(t) = e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right)$$

og vi konkluderer:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{\underline{e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right) B_n \sin nx}}$$

men vi kan sette $B_n = 1$ (vi har allerede to vilkårlige konstanter C_n og D_n, så B_n kan "bakes inn" der).

b)

Her er det bare $u(x,t) = u_4(x,t)$ som kan komme i betraktning. Vi har fra svaret på forrige punkt (med $B_n = 1$),

$$u(x,0) = C_4 \sin 4x \underbrace{= 0}_{\text{fra initialbet.}} \implies C_4 = 0.$$

Vi står derfor igjen med

$$u(x,t) = e^{-t/2} D_4 \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x$$

Men da er

$$u_t(x,t) = -\frac{1}{2} e^{-t/2} D_4 \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x + e^{-t/2} D_4 \frac{\sqrt{63}}{2} \cos \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x$$

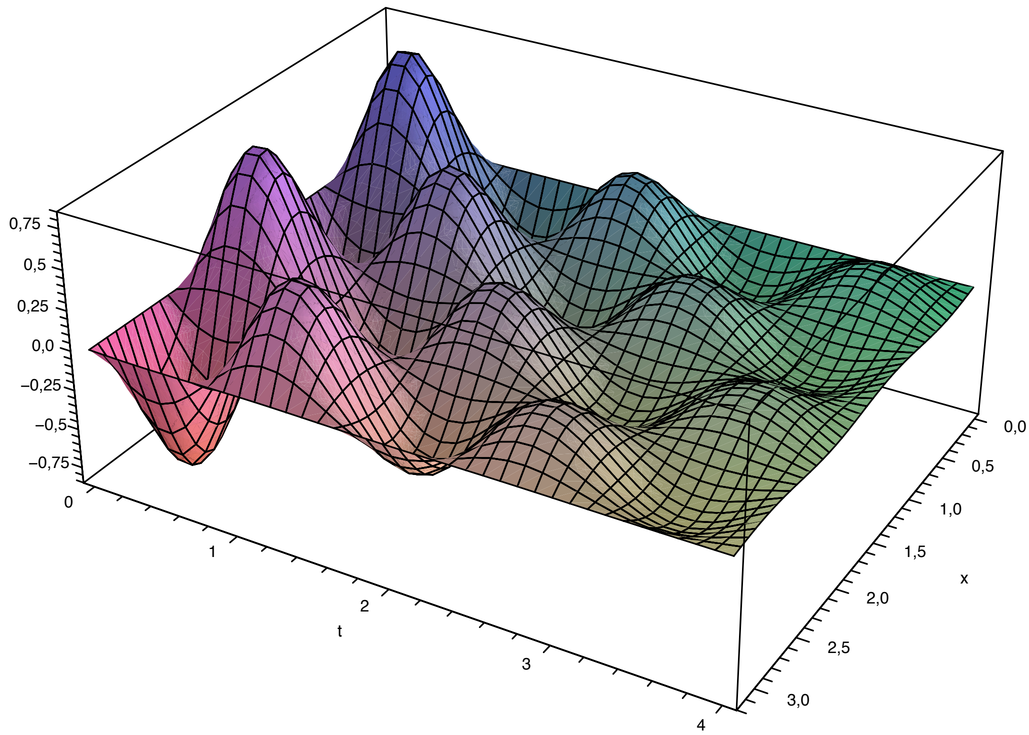
og innsatt $t = 0$:

$$u_t(x,0) = D_4 \frac{\sqrt{63}}{2} \sin 4x \underbrace{= \sin 4x}_{\text{fra initialbet.}} \implies D_4 = \frac{2}{\sqrt{63}}.$$

Svaret er altså

$$\underline{\underline{u(x,t) = e^{-t/2} \frac{2}{\sqrt{63}} \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x.}}$$

Her et plot av løsningen:



$\boxed{10}$ Vi har (se s. 176 i Rottmann for def.)

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-iwx}\, dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \cos wx\, dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \sin wx\, dx}_{=0 \text{ pga. odde funksjon i } x} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-|x|} \cos wx\, dx \qquad \text{(integranden er like funksjon av } x\text{)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-x} \cos wx\, dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \qquad \text{(Rottmann s. 144, nr. 133).}
\end{aligned}$$

Men $x = \infty$ gir ikke noe bidrag, siden $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cos wx = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \sin wx = 0$. Får derfor

$$\widehat{f}(w) = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+w^2}}}.$$

Fra inversjonsformelen har vi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w) e^{iwx}\, dw$$

dvs.

$$\begin{aligned}
e^{-|x|} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwx}}{1+w^2}\, dw \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw + \frac{i}{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin wx}{1+w^2}\, dw}_{=0 \text{ pga. odde funksjon av } w} \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw \qquad \text{(integranden er like funksjon av } w\text{)}
\end{aligned}$$

og ved å sette $x = 1$ får vi da:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{1+w^2}\, dw = \frac{\pi}{2e}$$

som skulle vises.

$\boxed{11}$ Vi bruker tilnærmelsene

$$u_{xx}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j})$$

og

$$u_{yy}(i \cdot h, j \cdot h) \approx \frac{1}{h^2}(u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1})\ .$$

Dette gir ligningene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{21}) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{11} + u_{12}) &= -1 \\
\frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{21} + 1) + \frac{1}{h^2}(1 - 2u_{21} + 1) &= -1 \\
\frac{1}{h^2}(1 - 2u_{12} + 1) + \frac{1}{h^2}(u_{11} - 2u_{12} + 1) &= -1 \,.
\end{aligned}$$

Setter inn $h = 1/4$ og får ligningene

$$\begin{aligned}
-4u_{11} + u_{21} + u_{12} &= -33/16 = -2.0625 \\
u_{11} - 4u_{21} &= -49/16 = -3.0625 \\
u_{11} - 4u_{12} &= -49/16 = -3.0625 \,.
\end{aligned}$$

Disse har løsningene

$$u_{11} = 115/112 = 1.0268, u_{12} = u_{21} = 229/224 = 1.0223$$