Fra Kreysig K9, avsnitt 6.3 og 6.4

$\boxed{1}$ Vi finner den Laplacetransformerte av

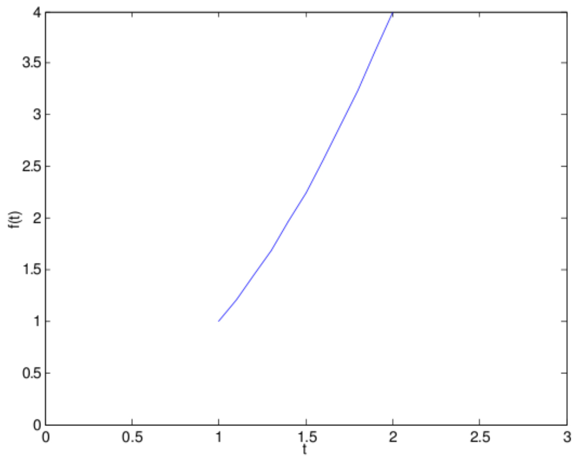
$$(t-1)^2 u(t-1)$$

ved å bruke transformasjonsregelen $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}$ (2. forskyvningsregel, Kreyszig s. 267 teorem 1) med $f(t) = t^2$ og $a = 1$. Vi får at

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)^2 u(t-1)\} &= e^{-s}\mathcal{L}(t^2)(s)\\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3}\end{aligned}$$

siden $\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$.

$\boxed{2}$ Funksjonen kan skrives som $t^2(u(t-1) - u(t-2))$.



Figur 1: Plott av t^2, $1 < t < 2$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t^2 u(t-a)) &= e^{-as}\mathcal{L}((t+a)^2)\\ &= e^{-as}\mathcal{L}(t^2 + 2ta + a^2)\\ &= e^{-as}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2a}{s^2} + \frac{a^2}{s}\right)\end{aligned}$$

Vi får da

$$\mathcal{L}(t^2u(t-1) - t^2u(t-2)) = e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}\right) - e^{-2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{4}{s}\right)$$

$\boxed{3}$

$$y'' + 4y' + 5y = \delta(t-1), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$$

Sett $Y = \mathcal{L}(y)$. Laplacetransformerer ligningen ($\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$) og får

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] + 4[sY - y(0)] + 5Y = e^{-s}$$

dvs.

$$(s^2 + 4s + 5)Y = 3 + e^{-s}$$

og følgelig

$$Y = \frac{3 + e^{-s}}{s^2 + 4s + 5} = \frac{3}{(s+2)^2 + 1} + \frac{1}{(s+2)^2 + 1}e^{-s}.$$

Vi har

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2 + 1}\right\} = e^{-2t}\sin t$$

ifølge skiftteorem 1. Ved også å bruke skiftteorem 2 får vi

$$\begin{aligned} y = \mathcal{L}^{-1}(Y) &= 3e^{-2t}\sin t + e^{-2(t-1)}\sin(t-1)u(t-1) \\ &= \begin{cases} 3e^{-2t}\sin t & \text{for } 0 < t < 1 \\ e^{-2t}\left[3\sin t + e^2\sin(t-1)\right] & \text{for } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Fra Kreysig K9, avsnitt 6.6

$\boxed{4}$ Laplacetransformen til

$$f(t) = t^2\cos\omega t$$

Ved derivasjonsformelen, er

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}(f)(s) \\ &= \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(\cos\omega t) \\ &= \frac{d^2}{ds^2}\frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{d}{ds}\frac{s^2 + \omega^2 - s\cdot 2s}{(s^2+\omega^2)^2} \\ &= \frac{d}{ds}\frac{\omega^2 - s^2}{(s^2+\omega^2)^2} \\ &= \frac{-2s(s^2+\omega^2)^2 - (\omega^2 - s^2)2(s^2+\omega^2)2s}{(s^2+\omega^2)^4} \\ &= \frac{-2s(s^2 + \omega^2 + 2\omega^2 - 2s^2)}{(s^2+\omega^2)^3} \\ &= \frac{2s(s^2 - 3\omega^2)}{(s^2+\omega^2)^3} \end{aligned}$$

Fra Kreysig K9, avsnitt 6.5

$\boxed{5}$ **a)** Vi har

$$1 * 1 = \int_0^t dt = t.$$

b) Vi skal beregne konvolusjonen $e^t * e^{-t}$. Vi setter inn i definisjonen for konvolusjon, og får:

$$\begin{aligned}
(e^t * e^{-t}) &= \int_0^t e^{\tau} e^{-(t-\tau)}\, d\tau \\
&= e^{-t} \int_0^t e^{2\tau}\, d\tau \\
&= e^{-t}[\frac{1}{2}e^{2\tau}]_0^t \\
&= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\
&= \sinh t
\end{aligned}$$

c) Vi skal finne $\sin \omega t * \cos \omega t$.

$$\begin{aligned}
\sin \omega t * \cos \omega t &= \int_0^t \sin(\omega\tau)\cos(\omega t - \omega\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(\omega t) + \sin(2\omega\tau - \omega t) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(\omega t)\tau - \frac{1}{2\omega}\cos(2\omega\tau - \omega t)\right]_0^t \\
&= \frac{1}{2}\left(t\sin(\omega t) - \frac{1}{2\omega}\cos(\omega t) + \frac{1}{2\omega}\cos(-\omega t)\right) \\
&= \frac{1}{2} t \sin(\omega t)
\end{aligned}$$

d) Vi skal regne ut konvolusjonsproduktet $(f * g)(t)$ med $f(t) = t$ og $g(t) = e^t$.

$$\begin{aligned}
t * e^t &= \int_0^t f(v)g(t-v)\, dv = \int_0^t v e^{t-v}\, dv \\
&= \Big[v(-e^{t-v})\Big]_{v=0}^t + \int_0^t e^{t-v}\, dv \qquad \text{(delvis integrasjon)} \\
&= -t + \Big[-e^{t-v}\Big]_{v=0}^t = e^t - t - 1
\end{aligned}$$

$\boxed{6}$ Vi skal løse integralligningen

$$y(t) = \sin t + \int_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)\, d\tau = \sin t + (y * \sin)(t).$$

Ved laplacetransformasjon får vi:

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{s^2+1} + Y\frac{1}{s^2+1} \\
\Rightarrow \quad s^2 Y = 1 \quad &\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad y(t) = t
\end{aligned}$$