Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4135
Matematikk 4D
Høsten 2009

Løsningsforslag — Øving 3

$\boxed{1}$ Eksamensoppgave des 2002, oppg 1

a) Ved hjelp av Heavisidefunksjonen $u(t)$ kan vi skrive

$$f(t) = (t-1)^2 u(t-1).$$

Skifte på t-aksen gir oss da at

$$F(s) = \frac{2}{s^3} e^{-s}.$$

Integralregelen gir oss videre at

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) = \frac{2}{s^4} e^{-s}.$$

b) Vi setter $X_1 = \mathcal{L}(x_1)$ og $X_2 = \mathcal{L}(x_2)$. Det transformerte systemet er da

$$\begin{aligned} sX_1 + X_2 &= F(s) \\ X_1 - (sX_2 - 1) &= G(s) \end{aligned}$$

Løsningen blir

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{2}{s^4} e^{-s} - \frac{1}{s^2+1} \\ X_2 &= \frac{s}{s^2+1} \end{aligned}$$

Når vi transformerer tilbake får vi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3}(t-1)^3 u(t-1) - \sin t \\ x_2 &= \cos t. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Eksamensoppgave kont 2003, oppg 2

Vi har at

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Ved å derivere transformen får vi etter et fortegnsskift at

$$\mathcal{L}(tf''(t)) = -2sF(s) - s^2 F'(s) + f(0).$$

Ved å bruke denne regelen får vi at den transformerte ligningen $\mathcal{L}(ty'' + 2t + ty)$ blir

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) + 1 + 2(sY - 1) - Y' = 0$$

Algebra viser at

$$Y'(s) = -\frac{1}{s^2+1}.$$

Ved å transformere tilbake ser vi altså at

$$\mathcal{L}^{-1}(Y') = -\sin t.$$

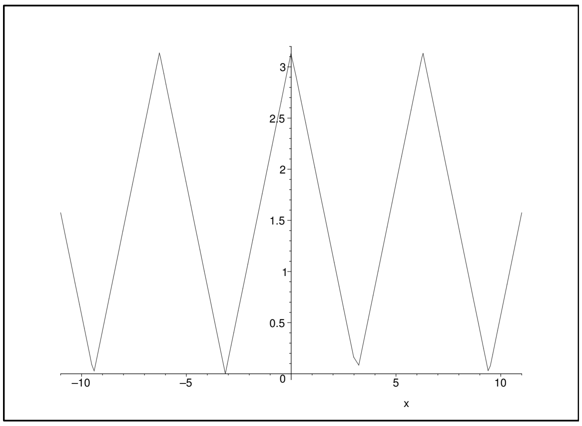
Men siden $Y' = \mathcal{L}(-ty)$, har vi

$$-ty = \mathcal{L}^{-1}\left(\mathcal{L}(-ty)\right) = \mathcal{L}^{-1}(Y') = -\sin t.$$

Følgelig er

$$y(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

3 Funksjonen ser slik ut:



4 Fourier-rekka til den 2π-periodiske funkjson gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \text{ellers.} \end{cases}$$

Finner koeffisientene.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$$

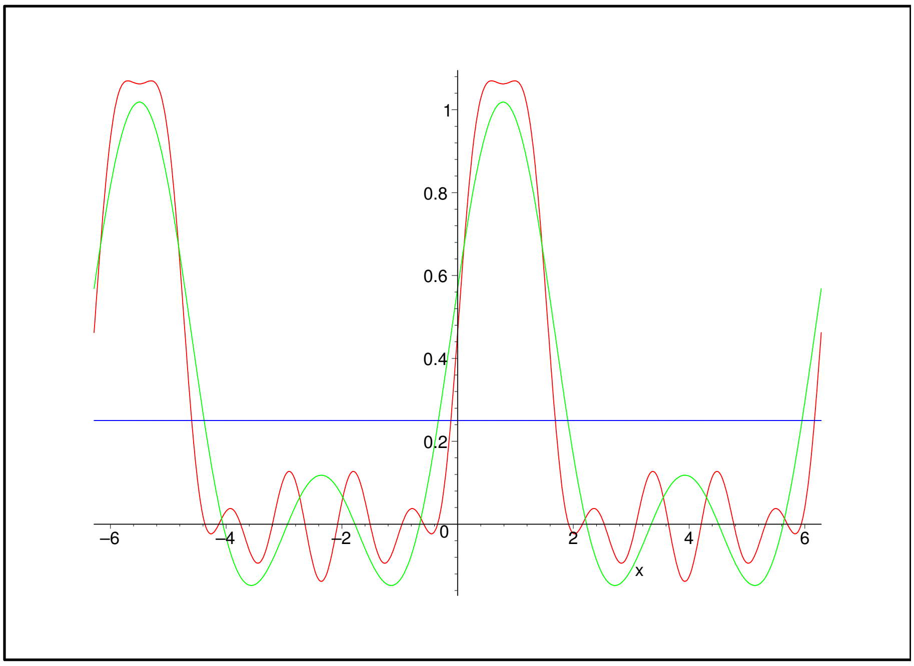
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{2}) \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)\pi} & , n = 2m-1 \quad m \in \mathbb{N} \\ 0 & , n = 2m \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(\frac{n\pi}{2})\right) \\
&= \frac{1}{n\pi}\begin{cases} 0 & , n = 4m \\ 1 & , n = 4m+1 \\ 2 & , n = 4m+2 \quad m \in \mathbb{N} \\ 1 & , n = 4m+3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dermed har vi:

$$
f(x) \sim \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos(2n-1)x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(4n-2)x}{4n-2}
$$

Se før øvrig figur 1.



Figur 1: Et lite plot