Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

**Løsningsforslag — Øving 4**

1 Gradienten til $f$ er $\nabla f = (3x^2 - y^2)\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. I punktet $P$ blir den $2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$. Enhetsvektoren i retning $\boldsymbol{v}$ er $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{1}{7}(2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k})$. Den retningsderiverte i retningen $\boldsymbol{v}$ er $\nabla f_P \cdot \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{4}{7}$.

Den retningsderiverde er størst i retning gradienten, og størrelsen er lengden til gradienten. I dette tilfellet er den $\|\nabla f_P\| = 3$.

2 Finn Fouriercosinusrekka til $f(x) = \sin \pi x,\ 0 < x < 1,\ p = 2L = 1$.

Fourierkoeffisientene beregnes ved bruk av Eulerformlene ($L = \frac{1}{2}$):

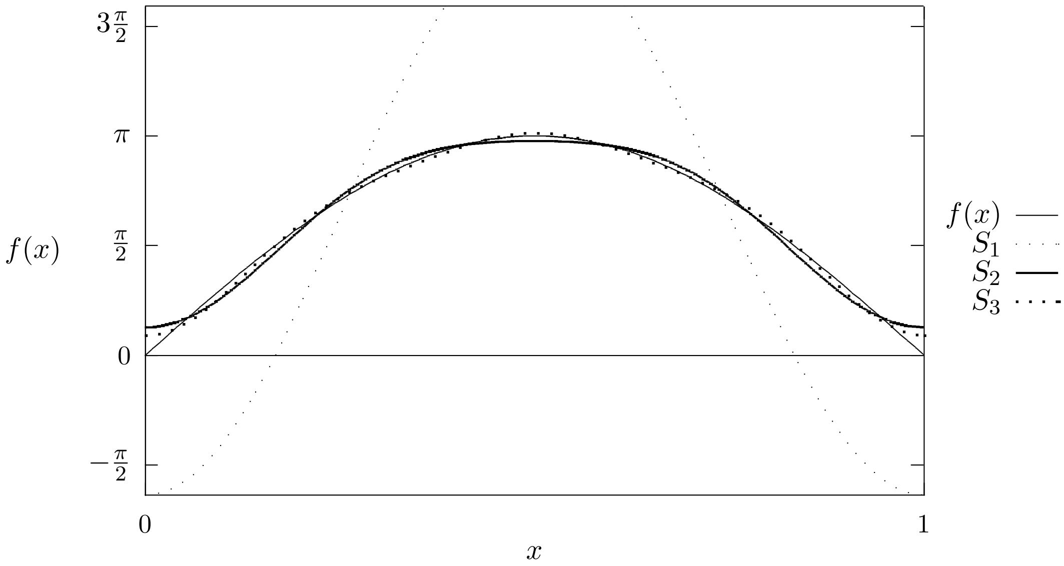
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^1 \sin \pi x\,dx = \frac{2}{\pi} \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cos 2n\pi x\,dx \\
&= 2\int_0^1 \sin \pi x \cos 2n\pi x\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\sin \pi(1+2n)x + \sin \pi(1-2n)x\right]\,dx = \frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4n^2}, \qquad n \geq 1
\end{aligned}
$$

Siden $f(x)$ er en like funksjon, og $\sin(2n\pi x)$ er en odde funksjon, er

$$
b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\sin 2n\pi x\,dx = 0, \qquad n \geq 1
$$

Altså er Fourierrekka til $f(x)$

$$
\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos 2n\pi x.
$$




Tegningen viser $f(x)$ og de tre første partialsummene $S_1, S_2$, og $S_3$.

$\boxed{3}$ $\sin(x^2)$ - like
$\sin^2 x$ - like
$x \sinh x$ - like
$|x^3|$ - like
$e^{\pi x}$ - hverken-eller
$xe^x$ - hverken-eller
$\tan 2x$ - odd
$x/(1+x^2)$ - odd

$\boxed{4}$ Vi har funksjonen

$$f(x) = x \quad , \quad 0 < x < L$$

Fourierkoeffisientene for cosinusrekka er gitt ved Eulerformlene

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2} \quad \text{gjennomsnittsverdien.}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x\cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}([\frac{xL}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{L})]_0^L - \frac{L}{n\pi}\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}x) \\
&= -\frac{2}{n\pi}[-\frac{L}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{L})]_0^L \\
&= \frac{2L}{(n\pi)^2}(\cos(n\pi) - 1) \\
&= \frac{2L}{(n\pi)^2}\begin{cases} -2 & , n \text{ oddetall} \\ 0 & , n \text{ partall} \end{cases}
\end{aligned}$$

Fourierkoeffisientene for sinusrekka er gitt ved Eulerformlene

$$\begin{aligned}
b_n &= 2\frac{1}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}\int_0^L x\sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{L}([-\frac{xL}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{L})]_0^L + \frac{L}{n\pi}\int_0^L \cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}x) \\
&= -\frac{2}{n\pi}L\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}[\frac{L}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{L})]_0^L \\
&= -\frac{2L}{n\pi}(-1)^n
\end{aligned}$$

Dermed har vi at Fourier-cosinusrekken til $f$ er

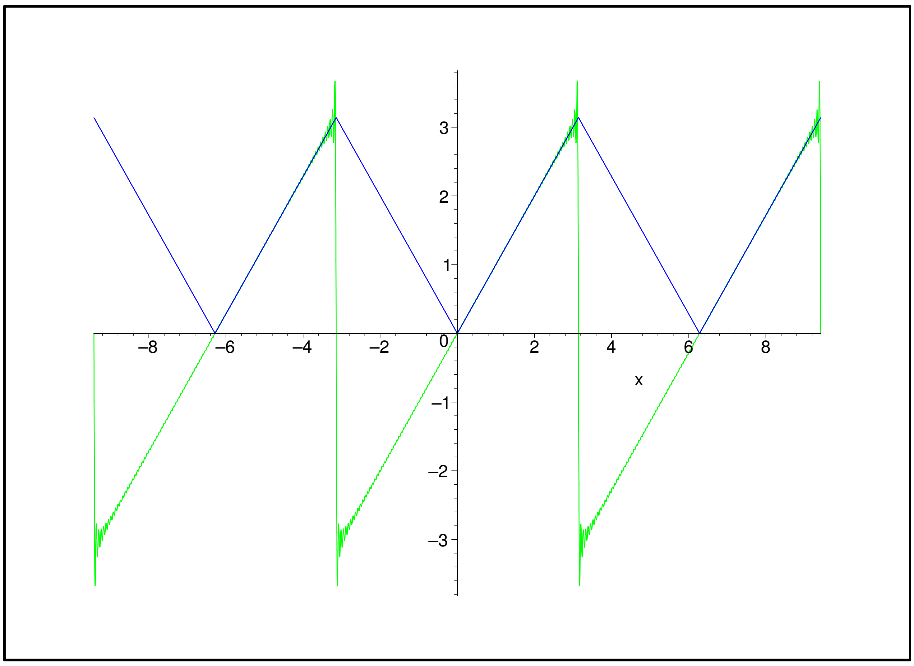
$$\frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{(2n-1)\pi x}{L})}{(2n-1)^2},$$

og Forier-sinusrekken til $f$ er

$$\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(\frac{n\pi x}{L}).$$

Se figur **??**

$\boxed{5}$ Vi skal finne den komplekse Fourierrekka til $f(x) = x^2,\ -\pi < x < \pi$.




Formel (6) på side 497 i Kreyszig gir

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

Vi må skille mellom $n = 0$ og $n \neq 0$ og får (ved to delvis integrasjoner når $n \neq 0$):

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}, \qquad (n = 0)\\
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-inx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{-in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{i\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^2}{in}e^{in\pi} - \frac{\pi^2}{in}e^{-in\pi}\right) + \frac{1}{i\pi n}\left[\frac{x}{-in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx\\
&= \frac{1}{\pi n}\left(\frac{\pi}{n}e^{-in\pi} + \frac{\pi}{n}e^{in\pi}\right) - \frac{1}{\pi n^2}\frac{1}{in}\left[e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= 2\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{\pi i n^3}\left(e^{-in\pi} - e^{in\pi}\right)\\
&= 2\frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad (n \neq 0)
\end{aligned}$$

der vi har brukt at $e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i\sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$.

Ergo har $f(x)$ kompleks Fourierrekke

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2}e^{inx}$$

Vi merker oss her at $c_n = c_{-n}$, så vi har at $a_n = 2c_n$ og $b_n = 0$. Altså er

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

$\boxed{6}$ Fra 11.4.11 har vi at den komplekse Fourierrekken til $f$ er

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx}$$

Vi får da

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} e^{inx} \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} (e^{inx} + e^{-inx}) \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{n^2} 2\cos nx \\
&= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx
\end{aligned}$$

som er (cosinus) Fourierrekken i reel form.