Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{1}$ Vi skal bruke Fourierintegral til å vise at

$$\int_0^\infty \frac{\cos xw + \sin xw}{1+w^2}\,dw = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 0 \\ \pi/2 & \text{hvis } x = 0 \\ \pi \mathrm{e}^{-x} & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

Legg merke til at $\pi/2$ er middelverdien av 0 og $\pi \mathrm{e}^{-0} = \pi$. Derfor er

$$f(x) = \int_0^\infty [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]dw \quad \forall\, x$$

der $A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos wv\,\mathrm{d}v$ og $B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin wv\,\mathrm{d}v$, for

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } x < 0 \\ \pi/2 & \text{hvis } x = 0 \\ \pi \mathrm{e}^{-x} & \text{hvis } x > 0 \end{cases}$$

Vi får ved bruk av Rottmann, formel 132 og 133 side 144 at

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi \mathrm{e}^{-v}\cos wv\,\mathrm{d}v = \left[\frac{\mathrm{e}^{-v}}{1+w^2}(-\cos wv + w\sin wv)\right]_0^\infty = \frac{1}{1+w^2}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \pi \mathrm{e}^{-v}\sin wv\,\mathrm{d}v = \left[\frac{\mathrm{e}^{-v}}{1+w^2}(-\sin wv - w\cos wv)\right]_0^\infty = \frac{w}{1+w^2}$$

Følgelig kan $f(x)$ representeres ved Forierintegralet

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xw + w\sin xw}{1+w^2}\,dw$$

$\boxed{2}$ Gitt $f(x) = \sin x$ for $0 < x < \pi$, 0 for $x > \pi$. Vi skal finne Fouriersinusintegralet til $f(x)$. Fra (12) Kreyszig s. 562 får vi, når vi bruker den trigonometriske formelen $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ (Rottmann s. 88),

$$\begin{aligned} B(w) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin wx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin wx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(1-w)x - \cos(1+w)x]\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-w)x}{1-w} - \frac{\sin(1+w)x}{1+w}\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(1-w)\pi}{1-w} - \frac{\sin(1+w)\pi}{1+w}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin \pi w}{1-w} + \frac{\sin \pi w}{1+w}\right] = \frac{2\sin \pi w}{\pi(1-w^2)} \end{aligned}$$

idet $\sin(1-w)\pi = \sin(\pi - \pi w) = \sin \pi w$ og $\sin(1+w)\pi = \sin(\pi w + \pi) = -\sin \pi w$. Dermed blir Fouriersinusintegralet ((13) Kreyszig s. 562)

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \pi w}{1-w^2}\sin wx\, dw$$

dvs.

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi w}{1-w^2}\sin wx\, dw = \begin{cases} \pi(\sin x)/2 & \text{for } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{for } x > \pi. \end{cases}$$

$\boxed{3}$ Vi har fordi f er en odde funksjon.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos xw - i\sin xw)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\sin xw)dx =$$
$$-2i\int_0^\infty f(x)\sin xw dx = -2i\int_0^1 \sin xw dx = 2i\left(\frac{\cos w - 1}{w}\right)$$

Altså er

$$\mathcal{F}(f)(w) = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos w - 1}{w}$$

Merk at nær 0 har vi $\cos w = 1 - \frac{(w)^2}{2} + \frac{(w)^4}{24} - \cdots$, så nær 0 oppfører $\mathcal{F}(f)(w)$ som $\frac{-iw}{\sqrt{2\pi}}$.

$\boxed{4}$ Siden funksjonen $\sin(xw)$ er en odde funksjon blir $\int_{-1}^{1} e^{-ixw}dx = \int_{-1}^{1}\cos(xw)dx$. Altså blir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-ixw}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1}\cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 \cos(xw)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\frac{\sin(xw)}{w}\right]_0^1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin w}{w}.$$

Dersom $f(x)$ betegner funksjonen som er gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for} & |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for} & |x| = 1 \\ 1 & \text{for} & |x| < 1 \end{cases}$$

har vi nettopp regnet ut at $\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(w)}{w}$, og derfor er $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixw}\hat{f}(w)dw$. Siden $\hat{f}(w)$ er en likefunksjon er $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \cos(xw)\hat{f}(w)dw$. Ved å sette inn $\hat{f}(w)$ har vi $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(xw)\sin w}{w}dw$. Ved å velge $x = \frac{1}{2}$ får vi

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\frac{1}{2}w)\sin w}{w}dw = \frac{\pi}{2}.$$