Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4135
Matematikk 4D
Høsten 2009

Løsningsforslag — Øving 7

$\boxed{1}$ Skal verifisere at $u(x,t) = x^2 + t^2$ er en løsning av bølgeligningen med passende c. Vi beregner de nødvendige deriverte

$$u_{tt} = 2$$

$$u_{xx} = 2$$

og observerer at $u_{xx} - u_{tt} = 0$. Følgelig er dette en løsning av bølgeligningen med $c^2 = 1$.

$\boxed{2}$ Vi skal løse den partielle differensialligningen $u_{xy} = u_x$.

Vi innfører $p = u_x$. Da kan ligningen skrives $p_y = p$, og den kan løses som en separabel differensialligning for $p = p(x,y)$ der y er fri variabel og x er parameter:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = p, \quad \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y} = 1, \quad \ln p(x,y) = y + C_1(x), \quad p(x,y) = e^{y+C_1(x)} = C(x)e^y.$$

Vi kunne også løst $p_y - p = 0$ som en l ineær første ordens differensialligning.

Nå har vi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p = C(x)e^y$$

og integrasjon mhp. x gir

$$u(x,y) = f(x)e^y + g(y) \qquad \text{der} \qquad f(x) = \int C(x)\,dx\,;$$

her er $f(x)$ og $g(y)$ vilkårlige funksjoner.

$\boxed{3}$

$$\begin{cases} u_{xx} = 0 \\ u_{yy} = 0 \end{cases}$$

$$u_{xx} = 0 \Longleftrightarrow u_x = \phi(y) \Longleftrightarrow u = x\phi(y) + \psi(y)$$

Vi deriverer med hensyn på y og får:

$$u_y = x\phi'(y) + \psi'(y)$$
$$u_{yy} = x\phi''(y) + \psi''(y)$$

Altså

$$0 = u_{yy} = x\phi''(y) + \psi''(y)$$

$$\phi''(y) = 0 \text{ (ellers får vi en funksjon avhengig av } x\text{) og } \psi''(y) = 0.$$

$$\phi(y) = ay + b, \quad \psi(y) = cy + d$$

Svaret blir altså:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x(ay + b) + cy + d \\ &= axy + bx + cy + d \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Me skal finna $u(x, t)$ for strengen med lengd $L = \pi$ når $c^2 = 1$, starthastigheten er 0 og startutsvinget er som vist i figuren i oppgåva. Me kan skriva

$$u_t(x, 0) = g(x) = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

der

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 - \frac{x}{\pi} & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}.$$

Den generelle løysinga finn me i formel 12 side 591 i Kreyszig

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \frac{cn\pi t}{L} + B_n^* \sin \frac{cn\pi t}{L}) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

med

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x, \\ B_n^* &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Her vil $B_n^* = 0$ og

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\pi} \sin nx \, \mathrm{d}x + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \\ &= \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{\pi^2 n^2} & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{4}{\pi^2 n^2} & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Løysinga vert dermed

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{4}{\pi^2} \left(\cos t \sin x - \frac{1}{3^2} \cos 3t \sin 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5t \sin 5x - \frac{1}{7^2} \cos 7t \sin 7x + \dots \right) \\ &= \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)t \sin(2n+1)x \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **a)** Ligningen gir

$$F(x)[G''(t) + G'(t)] = F''(x)G(t) \implies \frac{G''(t) + G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

der k må være konstant. Følgelig har vi

$$F''(x) = kF(x), \tag{1}$$
$$G''(t) + G'(t) = kG(t). \tag{2}$$

Randbetingelsen gir

$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{3}$$

Vi løser først randverdiproblemet (4), (6). Det er tre muligheter:

1. $k > 0$. Da skriver vi $k = \mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$, men (6) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k > 0$.
2. $k = 0$. Gir generell løsning $F(x) = Ax + B$, men (6) gir $A = B = 0$, så vi kan se bort fra $k = 0$.
3. $k < 0$. Da skriver vi $k = -\mu^2$ der $\mu > 0$. Generell løsning blir da $F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$, men (6) gir $A = 0$ og $B\sin\mu\pi = 0$. Derfor må $\mu = n$, der $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi konkluderer at $F(x) = F_n(x) = B_n \sin nx$, svarende til $k = -n^2$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$. Nå løser vi (5) med $k = -n^2$, dvs.

$$G''(t) + G'(t) + n^2G(t) = 0$$

Kar. lign. er $\lambda^2 + \lambda + n^2 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + n^2 - \frac{1}{4} = 0$, som har røtter

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}.$$

Derfor er

$$G(t) = G_n(t) = e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right)$$

og vi konkluderer:

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = \underline{\underline{e^{-t/2}\left(C_n \cos t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}} + D_n \sin t\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}}\right) B_n \sin nx}}$$

men vi kan sette $B_n = 1$ (vi har allerede to vilkårlige konstanter C_n og D_n, så B_n kan "bakes inn" der).

b)

Her er det bare $u(x,t) = u_4(x,t)$ som kan komme i betraktning. Vi har fra svaret på forrige punkt (med $B_n = 1$),

$$u(x,0) = C_4 \sin 4x \underbrace{= 0}_{\text{fra initialbet.}} \implies C_4 = 0.$$

Vi står derfor igjen med

$$u(x,t) = e^{-t/2} D_4 \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x$$

Men da er

$$u_t(x,t) = -\frac{1}{2} e^{-t/2} D_4 \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x + e^{-t/2} D_4 \frac{\sqrt{63}}{2} \cos \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x$$

og innsatt $t = 0$:

$$u_t(x,0) = D_4 \frac{\sqrt{63}}{2} \sin 4x \underbrace{= \sin 4x}_{\text{fra initialbet.}} \implies D_4 = \frac{2}{\sqrt{63}}.$$

Svaret er altså

$$u(x,t) = \underline{\underline{e^{-t/2} \frac{2}{\sqrt{63}} \sin \frac{t\sqrt{63}}{2} \sin 4x.}}$$

Her et plot av løsningen: