Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 8

$\boxed{1}$ Vi skal vise at funksjonen

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

er løsning av ligningen

$$u_t = u_{xx}.$$

I derivasjonsøyemed kan det være greit å skrive funksjonen på formen

$$\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2 t^{-1}}.$$

Vi har

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}\right) e^{-\frac{1}{4}x^2t^{-1}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2t^{-1}} \left(-\frac{1}{4}x^2\left(-t^{-2}\right)\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}t^{-1}\right)\frac{1}{2}\left(-t^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{1}{4}x^2t^{-1}} + \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2t^{-1}} \left(\frac{1}{4}x^2t^{-2}\right) \\
&= \left(\left(-\frac{1}{2}t^{-1}\right) + \left(\frac{1}{4}x^2t^{-2}\right)\right)\frac{1}{2}\left(-t^{\frac{1}{2}}\right) e^{-\frac{1}{4}x^2t^{-1}} \\
&= \left(\left(-\frac{1}{2}t^{-1}\right) + \left(\frac{1}{4}x^2t^{-2}\right)\right) u \\
&= \left(\left(-\frac{1}{2t}\right) + \left(\frac{x}{2t}\right)^2\right) u.
\end{aligned}$$

Videre har vi

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2t^{-1}} \left(-\frac{1}{4}2xt^{-1}\right) \\
&= u\left(-\frac{1}{2}xt^{-1}\right).
\end{aligned}$$

En derivasjon til derivasjon m.h.p. x gir

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= u_x\left(-\frac{1}{2}xt^{-1}\right) + u\left(-\frac{1}{2}t^{-1}\right) \\
&= u\left(-\frac{1}{2}xt^{-1}\right)\left(-\frac{1}{2}xt^{-1}\right) + u\left(-\frac{1}{2}t^{-1}\right) \\
&= u\left(\frac{1}{2}xt^{-1}\right)^2 + u\left(-\frac{1}{2}t^{-1}\right) \\
&= \left(\left(\frac{x}{2t}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2t}\right)\right) u.
\end{aligned}$$

Dermed ser vi at

$$u_t = u_{xx}.$$

Vi har ligninga

$$u_{xx} = u_t$$

Ved å se på u som en funksjon av x og la t være en parameter kan vi ta Fouriertransformasjonen av ligninga og får

$$-\omega^2 \hat{u} = \hat{u}_t,$$

som er en ordinær differensialligning for $\hat{u}$. Vi løser denne ved separasjon av variable og får

$$\hat{u} = C\mathrm{e}^{-t\omega^2},$$

der C generelt kan være en funksjon av ω. For å forenkle tilbaketransformasjonen velger vi C til å være uavhengig av ω (siden vi ikke har noen initialverdibetingelse står vi fritt til å velge C).

Fra tabell over diverse Fouriertransformasjoner i boka har vi

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-a\omega^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}, \tag{1}$$

så løsningen blir

$$u\left(x,t\right) = \frac{C}{\sqrt{2t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{2}$$

Ved å sette $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$ får vi løsninga

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{4t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}} \tag{3}$$

som var den vi skulle komme fram til.

$\boxed{2}$ Vi skal finne temperaturen $u(x,t)$ i en stav ($L = \pi$, $c = 1$) som er helt isolert og har initial temperatur $f(x) = 1 - x/\pi$.

Siden varmestrømmen gjennom endeflatene er 0, og også proporsjonal med u_x slik at $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ for $t > 0$, må vi løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx} \tag{1}$$

med (adiabatiske) randbetingelser

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \qquad \text{for } t > 0, \tag{2}$$

og intialbetingelse

$$u(x,0) = 1 - x/\pi, \qquad 0 \le x \le \pi. \tag{3}$$

Vi finner først løsninger av (1) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som oppfyller randbetingelsene (2). Ved innsetting i (1) og divisjon med $F(x)G(t)$ får vi

$$\frac{G'}{G} = \frac{F''}{F}$$

som må være en konstant k siden venstresiden bare avhenger av t og høyresiden bare avhenger av x. Det gir differensialligningene

$$F'' - kF = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - kG = 0$$

som er oppfylte nøyaktig når $u = F(x)G(t)$ er løsning av (1). Den første ligningen har løsning

$$\begin{aligned}
&F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} && \text{for } k > 0,\ k = \mu^2\\
&F(x) = A + Bx && \text{for } k = 0,\\
&F(x) = A\cos px + B\sin px && \text{for } k < 0,\ k = -p^2.
\end{aligned}$$

Randbetingelsene $F'(0)G(t) = F'(\pi)G(t) = 0$, $t > 0$, gir to muligheter. Enten er $G(t) = 0$ for alle $t > 0$, men den muligheten gir bare løsningen $u(x,t) \equiv 0$, eller så er $F'(0) = F'(\pi) = 0$.

For $k > 0$ må vi ha $A = B = 0$ for å få $F'(0) = F'(\pi) = 0$.
For $k = 0$ blir $F'(0) = F'(\pi) = 0$ dersom $B = 0$, A kan være vilkårlig.
For $k < 0$ er $F'(0) = pB = 0$ hvis $B = 0$, og da er $F'(\pi) = pA\sin p\pi = 0$ dersom $p = n = 1, 2, 3, \ldots$ (og A vilkårlig). Med $A = 1$ får vi

$$\left.\begin{aligned}
&k = 0: && F(x) = 1\\
&k = -n^2: && F(x) = \cos nx
\end{aligned}\right\} \quad \text{dvs. } k = -n^2 : F(x) = \cos nx,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ligningen $G' - kG = 0$, $k = -n^2$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ har løsning $G(t) = Ae^{-n^2 t}$ så funksjonene av formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som passer i (1) og oppfyller randbetingelsene (2) blir derfor

$$u_n(x,t) = A_n e^{-n^2 t}\cos nx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Siden (1) er lineær og homogen, er summen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\cos nx$$

også løsning av (1) hvis rekken konvergerer og er leddvis deriverbar mhp. t og to ganger leddvis deriverbar mhp. x, randbetingelsene (2) er også oppfylt. Vi bestemmer koeffisientene A_n for $n = 0, 1, 2, \ldots$ slik at initialbetingelsen (3) også blir oppfylt:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

Vi ser at A_n må være a_n-koeffisienten i Fouriercosinusrekka for $f(x) = 1 - x/\pi$ på intervallet $0 \le x \le \pi$. Av formlene i Rottmann side 175 får vi

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\,dx = -\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)^2\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\cos nx\,dx\\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\Big(1 - \frac{x}{\pi}\Big)\frac{\sin nx}{n} - \frac{\cos nx}{\pi n^2}\Big]_0^{\pi} = \frac{2(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2} = \begin{cases} 4/(n^2\pi^2) & \text{for } n \text{ oddetall}\\ 0 & \text{for } n \text{ partall.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Svaret blir altså

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\Big(e^{-t}\cos x + \frac{1}{9}e^{-9t}\cos 3x + \frac{1}{25}e^{-25t}\cos 5x + \cdots\Big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}e^{-(2m-1)^2 t}\cos{(2m-1)x}. \end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Oppgåva er eit spesialtilfelle av det problemet som blir gjennomgått i læreboka på sidene (606–607 i K8, 558–560 i K9) , med $a = b = 24$, $f(x) = 20$. Vi får derfor løysing

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\frac{n\pi x}{24}\sinh\frac{n\pi y}{24},$$

der

$$A_n^* = \frac{2}{24\sinh n\pi}\int_0^{24} 20\sin\frac{n\pi x}{24}\,dx.$$

Vi finn at

$$I_n = \int_0^{24}\sin\frac{n\pi x}{24}\,dx = -\frac{24}{\pi n}\left[\cos\frac{n\pi x}{24}\right]_0^{24} = \frac{24}{\pi n}\left[1-\cos n\pi\right] = \frac{24}{\pi n}\left[1-(-1)^n\right].$$

Dette gir $I_{2m} = 0$, $I_{2m+1} = \frac{48}{\pi(2m+1)}$, og dermed

$$\begin{aligned} A_{2m}^* &= 0, \\ A_{2m+1}^* &= \frac{48\cdot 2\cdot 20}{\pi(2m+1)\cdot 24\sinh(2m+1)\pi} = \frac{80}{\pi(2m+1)\sinh(2m+1)\pi} \end{aligned}$$

Løysinga blir då

$$u(x,y) = \frac{80}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{(2m+1)\pi x}{24}\right)\sinh\left(\frac{(2m+1)\pi y}{24}\right)}{(2m+1)\sinh(2m+1)\pi}.$$